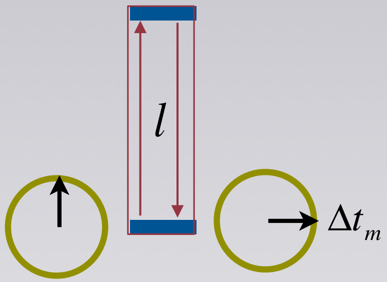
dilatazione dei tempi

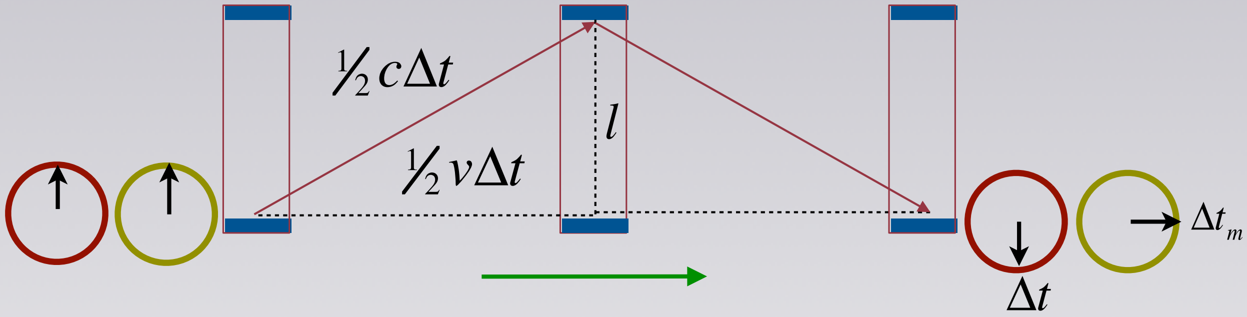
un orologio segna il tempo in base al tempo impiegato da un raggio di luce per andare avanti e indietro dalla sorgente luminosa al ricevitore

l'orologio (verde) segna un tempo Δt_m quando il raggio luminoso raggiunge il ricevitore:



$$2l = c\Delta t_m$$

se confrontiamo lo stesso orologio (verde) in movimento con due orologi (rossi) fermi e sincronizzati tra loro, rispetto ad essi il raggio luminoso impiega un tempo Δt maggiore:



$$\frac{1}{4}c^2\Delta t^2 = \left(\frac{1}{4}v^2\Delta t^2 + l^2\right)$$

$$c^2\Delta t^2 = \left(v^2\Delta t^2 + 4l^2\right)$$

$$\left(c^2 - v^2\right)\Delta t^2 = 4l^2 = \Delta t_m^2 c^2$$

$$\Delta t_m = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta t$$

posso ripetere lo stesso ragionamento per l'orologio rosso e concludere che

$$\Delta t = \Delta t_m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta t_m \quad ?!$$

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

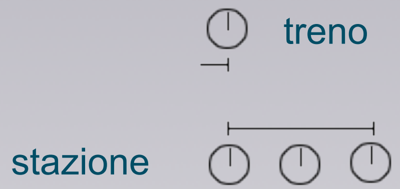


Fig. 1

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

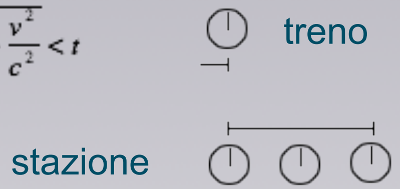


Fig. 1

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

treno

stazione

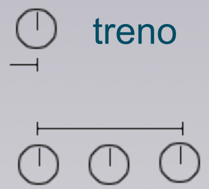


Fig. 1

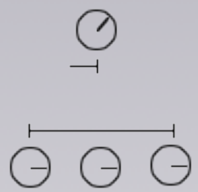


Fig. 2

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

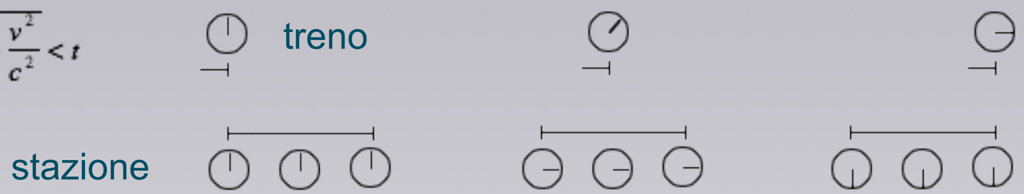


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

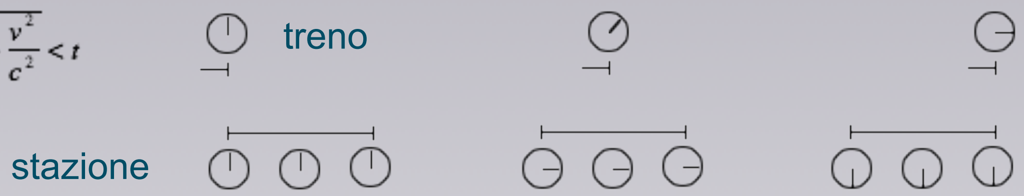


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Nota bene: il confronto è sempre tra un orologio in moto e un insieme di orologi sincronizzati nel riferimento in quiete

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

treno

stazione

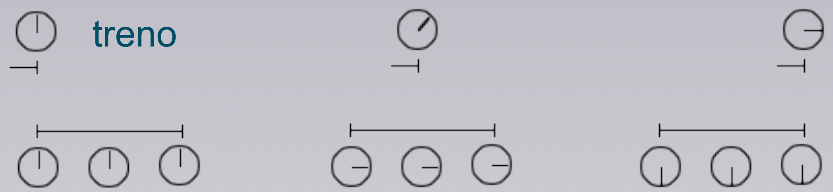


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

treno

stazione

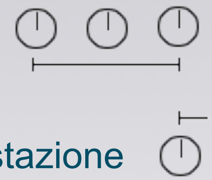


Fig. 4

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

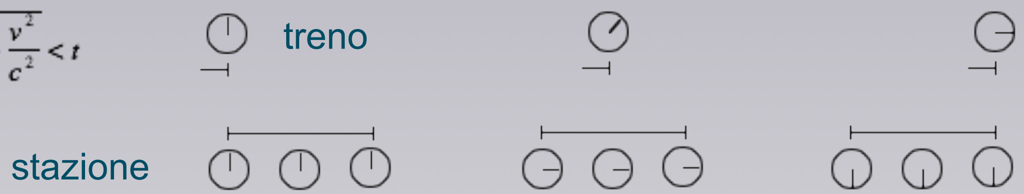


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

Fig. 4

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

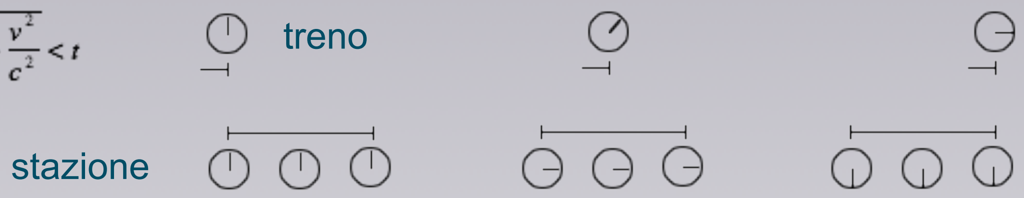


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

Fig. 4 Fig.5

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

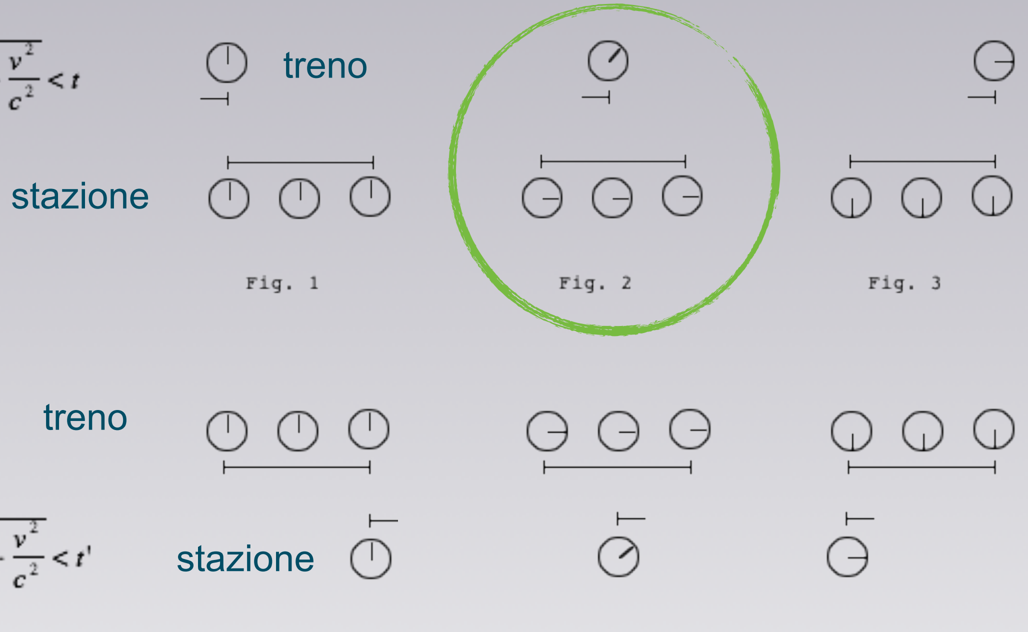


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Fig. 4 Fig.5 Fig. 6

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

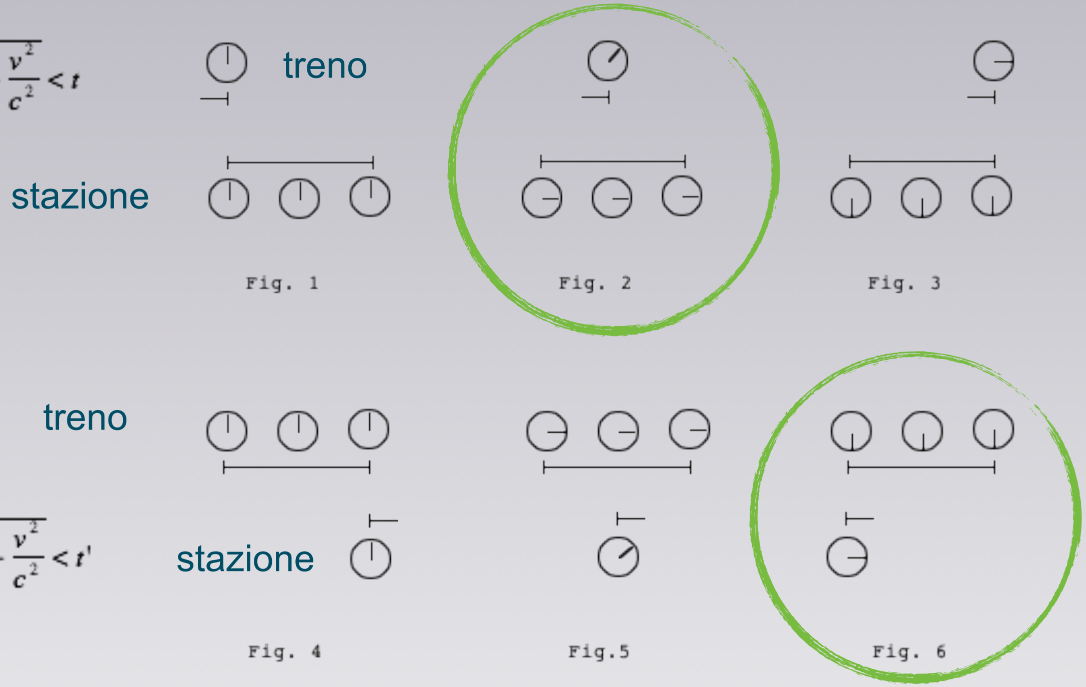


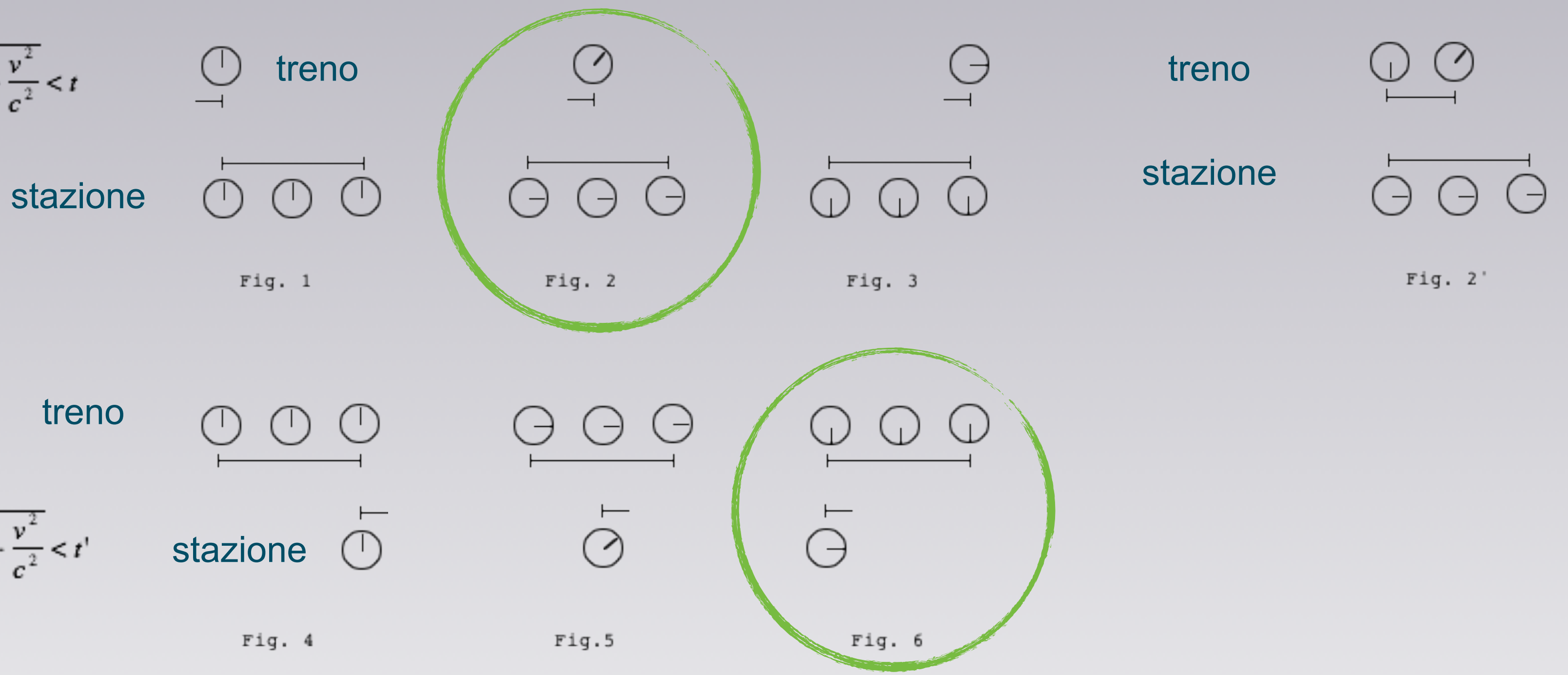
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Fig. 4 Fig.5 Fig. 6

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

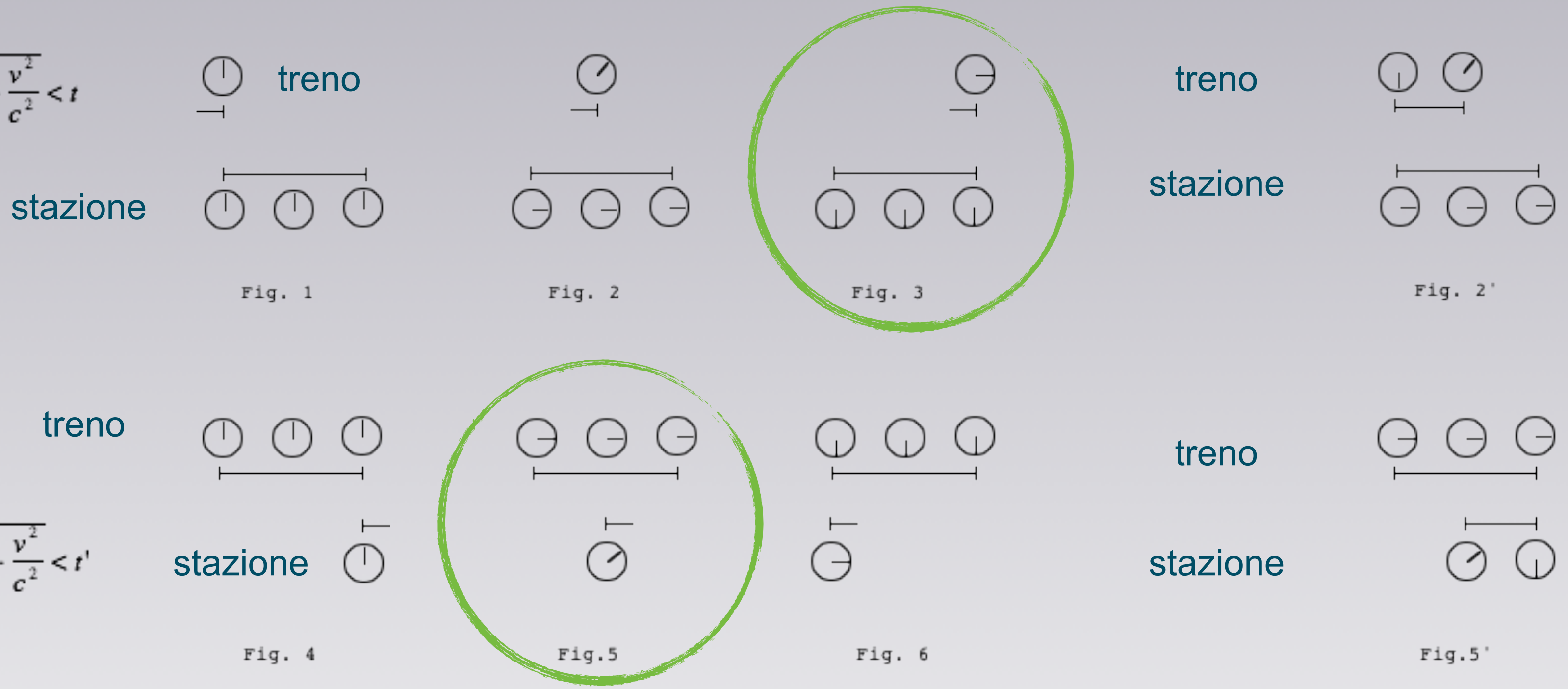


$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$

interpretazione della dilatazione dei tempi (modello: treno e stazione)

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t$$

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < t'$$



il tempo proprio

Questa costruzione degli effetti della relatività ristretta basata su un orologio a segnali luminosi facilita l'introduzione del concetto di "tempo proprio" e al tempo stesso la rende essenziale.

Qualunque orologio misura il suo tempo proprio. Un insieme di orologi fermi uno rispetto all'altro e sincronizzati tra loro (per esempio attraverso un segnale luminoso) misura lo stesso tempo, che quindi è il tempo proprio di un intero sistema di riferimento.

(La relatività generale amplierà il concetto di tempo proprio: non basta che gli orologi siano fermi uno rispetto all'altro per restare sincronizzati, devono anche essere soggetti allo stesso campo gravitazionale)

conseguenze

- contrazione delle lunghezze
- relatività della successione temporale
- trasformazione di Lorentz
  - trasformazione completa dei tempi
  - trasformazione delle posizioni

contrazione delle lunghezze

La lunghezza del treno, confrontata con la lunghezza della stazione nel sistema di riferimento in cui la stazione è ferma, risulta contratta, così come è contratta la lunghezza della stazione, confrontata con la lunghezza del treno nel riferimento in cui il treno è fermo (fenomeno della contrazione delle lunghezze).

Fig. 2'   Fig.5'

relatività della successione temporale

Nel riferimento della stazione la coda del treno arriva in cima alla stazione prima che la testa del treno sia arrivata in fondo alla stazione, mentre nel riferimento del treno la testa del treno arriva in fondo alla stazione prima che la coda del treno sia arrivata in cima alla stazione

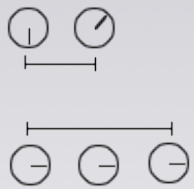


Fig. 2'

treno

stazione

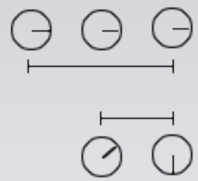


Fig.5'

trasformazioni dei tempi

Se si considera un in sieme di orologi in moto, questi possono essere tanto in ritardo che in anticipo rispetto a un sistema di orologi fermi, a seconda della loro posizione spaziale. In altri termini, le semplici relazioni tra t e t’, apparentemente contraddittorie, devono essere scritte più precisamente come

$$t_{x=0} = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad t'_{x'=0} = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Per trovare la dipendenza dei tempi segnati dagli orologi dalla posizione degli orologi stessi, dovendo esservi una dipendenza lineare (come si può vedere considerando altri orologi equispaziati), poniamo:

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + kx \qquad (1)$$

Consideriamo il punto x' = 0, fermo in Σ’ e assumiamo che a t=0 si trovi a x=0. La sua posizione in Σ è data da vt, in cui v è la velocità positiva del treno, mentre il tempo t' è dato dalla seconda delle due equazioni scritte sopra. Sostituendo si ottiene:

$$t = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + kvt \quad \Rightarrow \quad 1 = 1-\frac{v^2}{c^2} + kv \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v}{c^2} > 0$$

in cui k risulta positivo in quanto il treno si muove con velocità positiva. Se riscriviamo l’eq. (1) separando le coordinate dei due sistemi di riferimento e ricavando t’, e poi ripetiamo la derivazione scambiando i ruoli dei due riferimenti, tenendo conto che la velocità della stazione rispetto al treno è -v, otteniamo le due trasformazioni di Lorentz per i tempi:

$$t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t - \frac{v}{c^2}x \Rightarrow t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

trasformazione delle posizioni

Con semplici passaggi algebrici, dalle equazioni precedenti si possono ottenere le trasformazioni di Lorentz per le posizioni, che risultano:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

relatività della contemporaneità

si può vedere che due eventi che avvengano simultaneamente in punti diversi del riferimento Σ (per i quali cioè $t_2 = t_1 = t_0$) non sono più simultanei nel riferimento Σ':

$$t_2' = \gamma\left(t_0 - \frac{\beta}{c}x_2\right)$$

$$t_1' = \gamma\left(t_0 - \frac{\beta}{c}x_1\right)$$

$$\Delta t' = -\gamma\frac{\beta}{c}\Delta x$$

$t_2'-t_1'$ è positivo o negativo a seconda che x_2-x_1 sia negativo o positivo: due eventi contemporanei nel primo riferimento non lo sono nel secondo, anzi, possiamo trovare sia un riferimento nel quale 1 precede 2, sia un riferimento nel quale 2 precede 1

contrazione delle lunghezze

Per derivare la contrazione delle lunghezze, si deve stabilire come si trasforma la lunghezza di un regolo (la cui lunghezza a riposo sia $l = x_2 - x_1$) quando si muove con velocità v nel riferimento Σ' . Per fare questo si deve determinare la posizione in Σ' in uno stesso istante $t' = t_0'$ dei due punti estremi del regolo, ossia:

$$x_2 = \gamma(x_2' + vt_0')$$

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt_0')$$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1')$$

$$l' = \frac{l}{\gamma} < l$$

trasformazioni di Lorentz

$$\beta = v_x/c$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}.$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

un oggetto che si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz è detto quadrivettore

La posizione spaziotemporale (ct,x,y,z) è un quadrivettore

Le componenti di un quadrivettore devono essere grandezze fisiche omogenee

quadrivettori e invarianti relativistici

se definiamo il prodotto scalare tra due quadrivettori come il prodotto delle componenti temporali meno il prodotto scalare delle componenti spaziali abbiamo:

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3' =$$
$$= \gamma^2 (a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2 (a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 =$$
$$\gamma^2 (1 - \beta^2)(a_0 b_0 - a_1 b_1) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

il prodotto scalare tra due quadrivettori è invariante per trasformazioni di Lorentz, come il prodotto scalare di due vettori è invariante per traslazioni
(e per trasformazioni di Galilei)

Anche il modulo del quadrivettore spostamento (cioè l'intervallo spaziotemporale) sarà un invariante

$$\mathbf{dS}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Intervallo tra due eventi

per due eventi che sono collegati da un segnale luminoso:

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$L^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2$$

$$\Rightarrow c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

se $L^2 < c^2 (t_2 - t_1)^2$

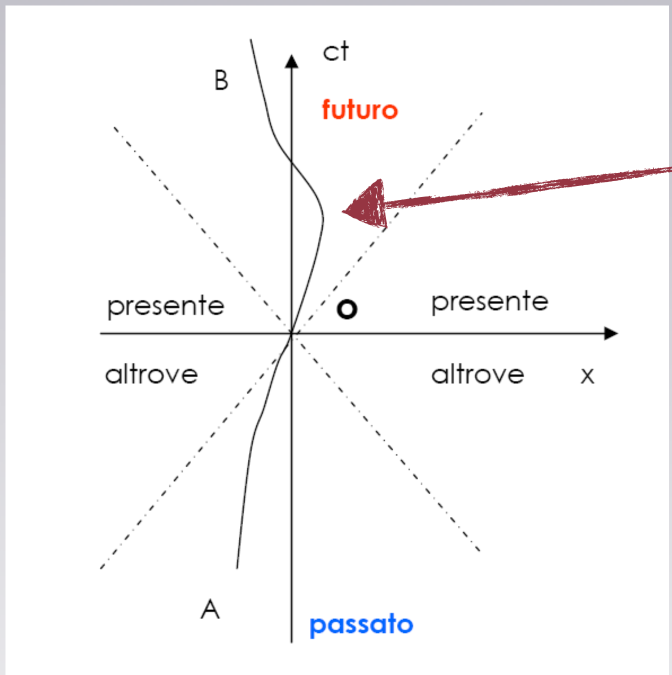
$$\Rightarrow c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 > 0$$

se $L^2 > c^2 (t_2 - t_1)^2$

$$\Rightarrow c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 < 0$$

$\Delta s \equiv (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ è il quadrivettore intervallo spaziotemporale, e la sua proprietà di essere maggiore, minore o uguale a zero è quindi invariante per trasformazioni di Lorentz

cono di luce e proprietà dello spazio-tempo

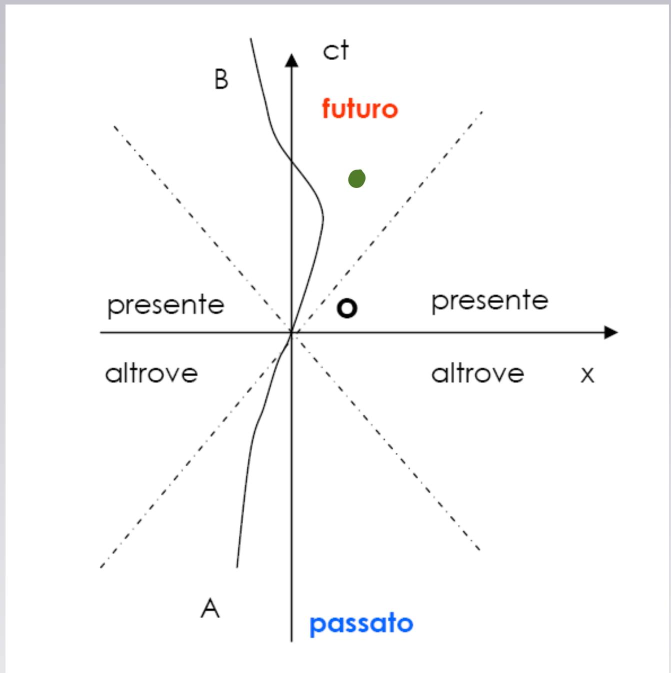


“linea di universo”: traiettoria di un punto materiale nello spaziotempo.

La pendenza della tangente alla linea di universo è proporzionale all’inverso della velocità e non può mai essere minore di 45º (che corrisponde alla velocità della luce)

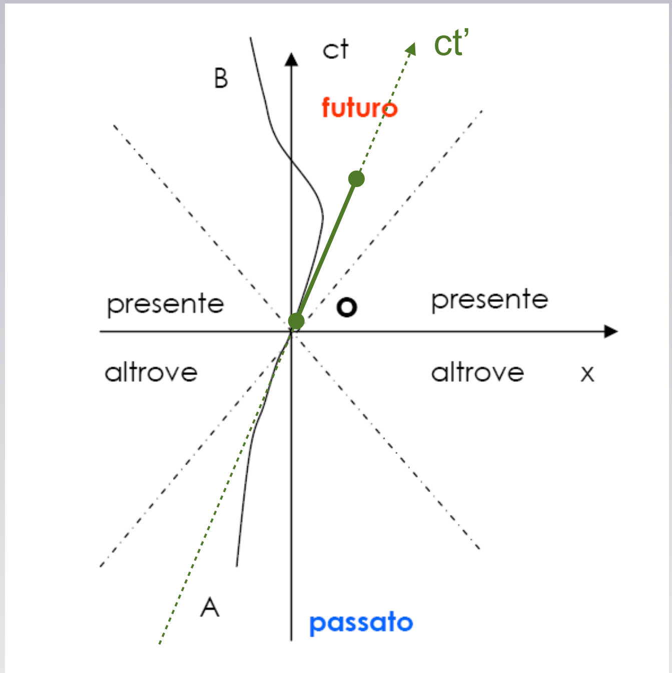
spazio di Minkowski

cono di luce e proprietà dello spazio-tempo



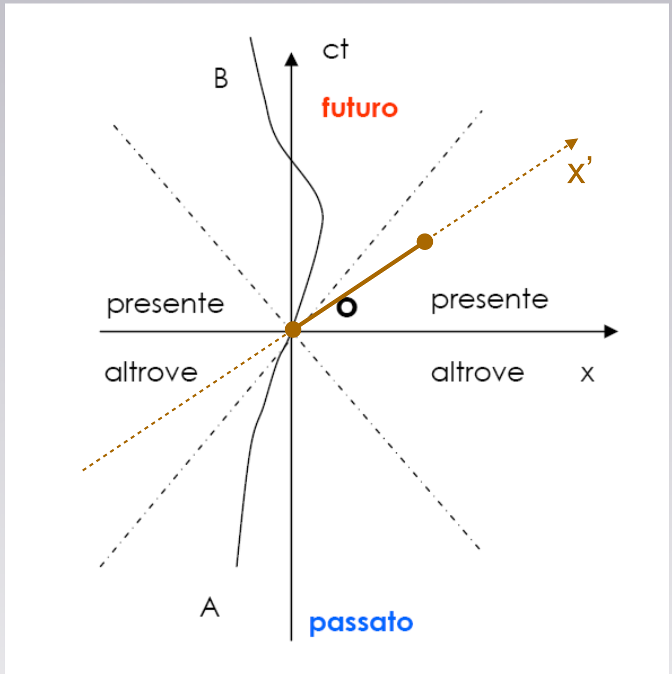
Consideriamo un qualunque punto nel futuro, $P=(ct,x)$. Posso considerare molte linee di universo che lo congiungono con l'origine O. Consideriamo ora un secondo riferimento che si muova con velocità pari a x/t . Quale sarà la linea di universo della origine O'?

cono di luce e proprietà dello spazio-tempo



- $S^2_{12} > 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo tempo e sono quindi connessi causalmente vale a dire che esiste una linea di universo che li connette uno all'altro. Esiste inoltre una trasformazione di Lorentz ad un nuovo sistema di riferimento nel quale i due eventi coincidono spazialmente ($\overrightarrow{x_1}' = \overrightarrow{x_2}'$) ma non temporalmente.

cono di luce e proprietà dello spazio-tempo

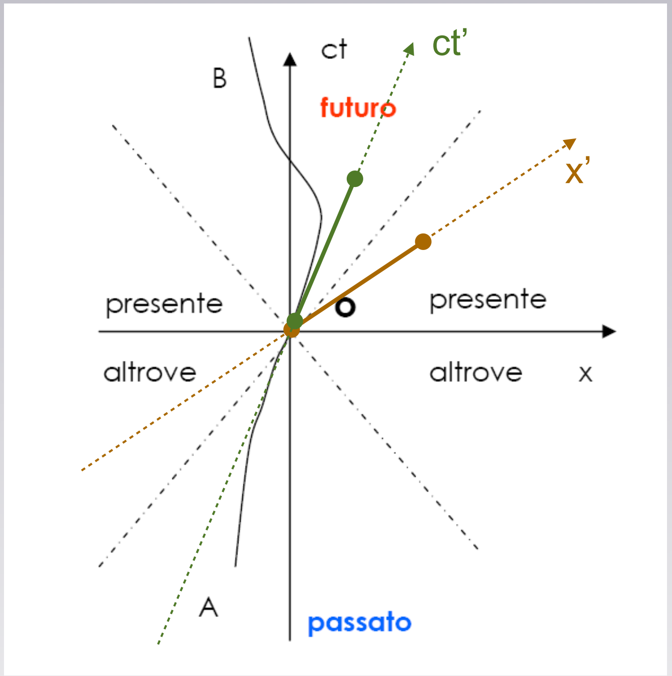


- $S^2_{12}>0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo tempo e sono quindi connessi causalmente vale a dire che esiste una linea di universo che li connette uno all'altro. Esiste inoltre una trasformazione di Lorentz ad un nuovo sistema di riferimento nel quale i due eventi coincidono spazialmente ($\overrightarrow{x_1}' = \overrightarrow{x_2}'$) ma non temporalmente.

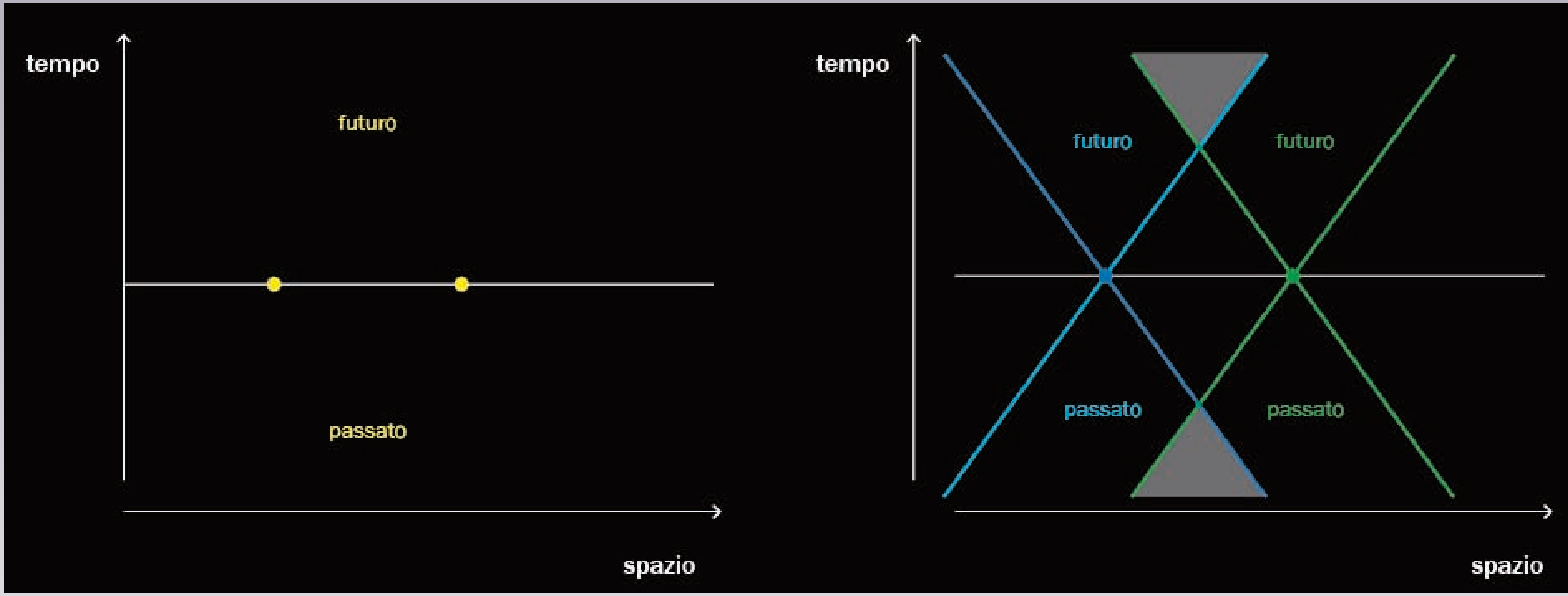
- $S^2_{12} < 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo spazio. Questi eventi non sono connessi perchè nessuna linea di universo può metterli in connessione (a meno di violare il limite rappresentato dalla velocità della luce). In questo caso esiste una trasformazione di Lorentz ad un sistema di riferimento nel quale i due eventi si verificano in punti diversi dello spazio ma nello stesso tempo ($t'_1 = t'_2$).

- $S^2_{12} = 0$: il primo evento si trova sul cono di luce generato dal secondo e viceversa.

cono di luce e proprietà dello spazio-tempo

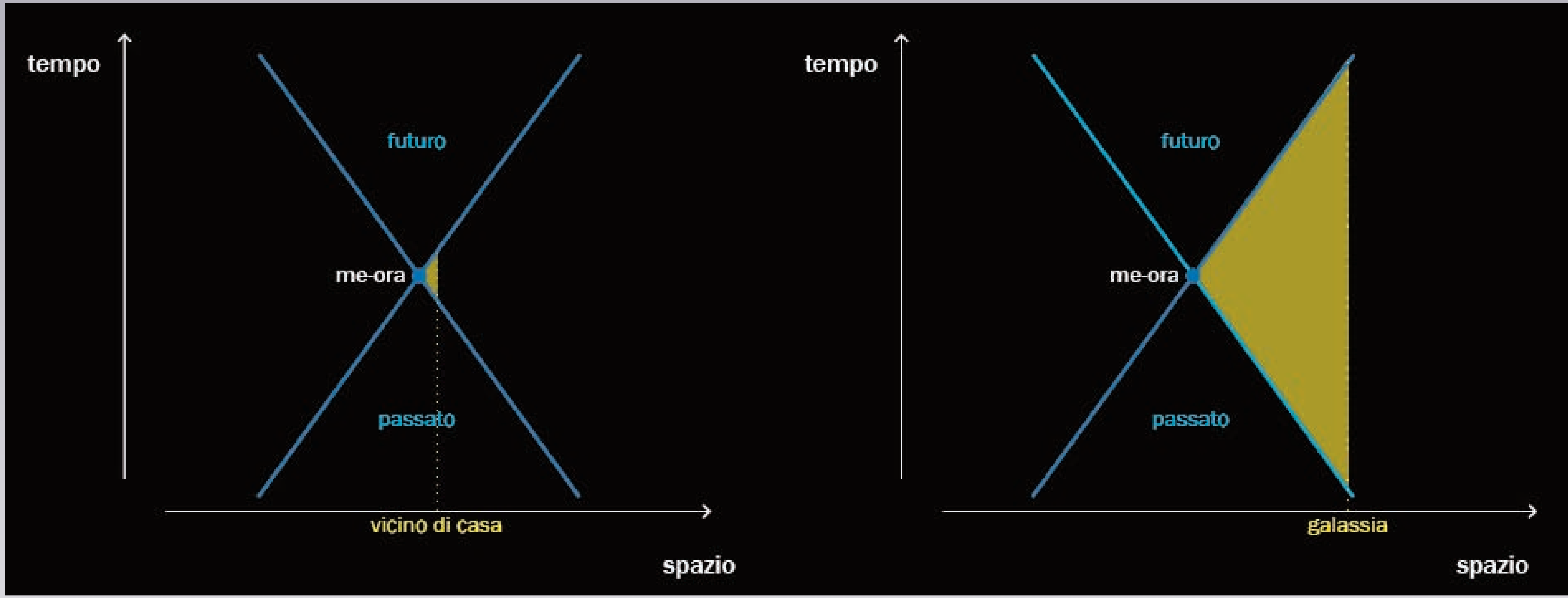


Una trasformazione di Lorentz può essere rappresentata sul piano di Minkowski con due assi simmetrici rispetto al cono di luce



Per la fisica newtoniana, due eventi che avvengono nello stesso istante, hanno lo stesso passato (semipiano inferiore) e lo stesso futuro (semipiano superiore). La linea orizzontale rappresenta il presente, ed è la stessa in qualunque sistema di riferimento.

Nella relatività ristretta, il punto blu e il punto verde sono simultanei solo in un particolare sistema di riferimento ed hanno un passato ed un futuro distinti, rappresentati dai due coni tridimensionali verde e blu. Le intersezioni dei due coni rappresentano il passato ed il futuro comuni dei due eventi.



L'intervallo di tempo degli eventi che non sono connessi causalmente a me-ora aumenta all'aumentare della distanza da me del punto dello spazio in cui questi eventi si verificano.
Questo intervallo di tempo è di qualche decina di nanosecondi per gli eventi che si verificano vicino a me (è per questo che tra me e una persona vicina, diciamo "in vista", gli effetti sono impercettibili), è di qualche decina di minuti per eventi che si verificano, ad esempio, su Marte e può essere di milioni o di miliardi di anni per eventi che si verificano su una lontana galassia.

Tempo proprio

Se osserviamo da un riferimento inerziale un orologio in moto arbitrario, possiamo considerare in ogni istante un riferimento inerziale rispetto al quale l'orologio sia in quiete. Nel riferimento inerziale in un tempo dt l'orologio percorre una distanza $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

Nel riferimento solidale con l'orologio, la distanza è nulla.

I moduli quadri dei due intervalli spaziotemporali devono essere uguali: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

Integrando $t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} < t_2 - t_1$ (si noti che γ non è costante)

Esempio: traiettoria circolare con l'orologio che torna nella posizione iniziale (problema non simmetrico)

vita media dei muoni

I muoni sono particelle instabili, copiosamente prodotte nell'interazione dei raggi cosmici primari con i primi strati dell'atmosfera, che decadono secondo la legge

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

la loro vita media a riposo è $\tau \simeq 2\mu s$

Se sono prodotti in media a 9000 m di quota con v = 0.998 c, in 2 μs percorrerebbero circa 600 m.

Ne arriverebbero sulla superficie terrestre circa 0.3 per milione.

Quella velocità corrisponde a γ = 15, nel sistema di riferimento della terra la loro vita media è quindi 30 μs, il loro percorso medio è di 9000 m!

Nel loro sistema di riferimento, l'atmosfera è contratta di 15 volte, e misura quindi 600 m.

esperimento su aerei in volo

dagli anni ’50, esperimenti su aerei in volo sui quali viaggiavano orologi atomici, ha permesso di verificare la dilatazione dei tempi in relatività ristretta anche con orologi macroscopici

in questo caso, tuttavia, bisogna tenere conto anche della dilatazione dei tempi causata dalla gravità, prevista dalla relatività generale

trasformazione delle velocità

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

$$dx = \gamma(dx' + Vdt') \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{(dx' + Vdt')}{(dt' + \frac{V}{c^2}dx')} = \frac{(dx' + Vdt')}{dt'(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'})} = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{Vv_x'}{c^2}}$$

Notiamo che se ci sono componenti y o z della velocità, vengono trasformate anch'esse:

$$dy = dy', dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)$$

la velocità non si trasforma come la parte spaziale di un quadrivettore

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{V}{c^2}dx')} = \frac{dy'}{dt'\gamma(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'})} = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{Vv_x'}{c^2}\right)}$$

composizione di due velocità

La composizione di una velocità con una velocità di trascinamento non può mai superare la velocità della luce:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}} < c$$

infatti $\beta_1(1-\beta_2) < (1-\beta_2) \Rightarrow \beta_1 - \beta_1\beta_2 < 1-\beta_2 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 < 1 + \beta_1\beta_2$

$$\Rightarrow \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} < 1$$