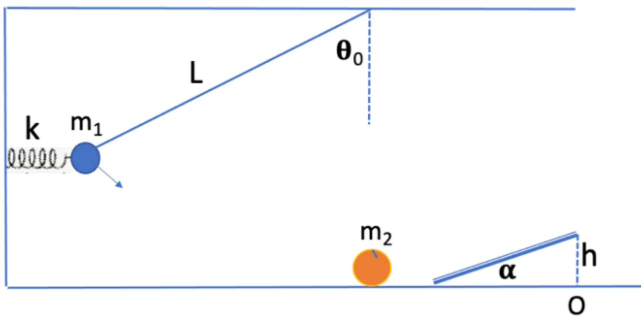
Esame scritto del corso di Fisica per Scienze biologiche
Proff. M. De Luca, F. Frasca, L. Graziani, R. Maoli, R. Schneider – 8 luglio 2022

Esercizio 1

Un pendolo di lunghezza L = 80.0 cm e massa m_1 = 450 g si trova ancorato ad una parete verticale tramite una molla ideale di costante elastica k = 127 N/m. Sapendo che all'equilibrio la molla è allungata di un tratto Δx = 6.00 cm rispetto alla sua lunghezza a riposo, calcolare:



(1) Il modulo della tensione del filo del pendolo e l'angolo θ_0 rispetto alla verticale.

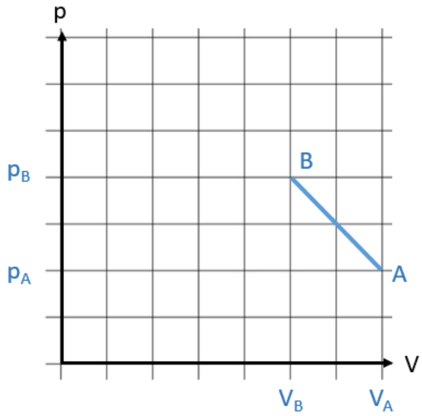
Immaginando che all'istante t = 0 la pallina m_1 si stacchi dalla molla, calcolare:

(2) la velocità con cui raggiunge la verticale, un istante prima di urtare elasticamente una pallina di massa m_2 = 2 m_1, inizialmente ferma sul piano orizzontale;

(3) la velocità della pallina m_2 immediatamente dopo l'urto, e il valore del coefficiente di attrito dinamico del piano inclinato lungo il quale essa risale dopo l'urto, sapendo che il piano ha lunghezza d = 35.0 cm, angolo di inclinazione α = 20°, e che m_2 arriva alla sommità del piano con velocità v_{2f} = 0.75 m/s.

Esercizio 2

Una stanza, di volume pari a V_A=70.0 m^3, viene riempita con m=19.2 kg di O_2 alla pressione p_A. Il gas compie un ciclo ABCDA, il cui tratto AB è rappresentato nel piano di Clapeyron in figura. Nel punto B, si ha p_B=2 p_A =1.01 10^5 Pa e V_B= 5/7 V_A. Il gas compie poi una compressione isobara, al termine della quale il suo volume è V_C= 2/7 V_A, seguita da un raffreddamento isocoro fino al punto D, in cui la sua pressione è uguale a p_A. Infine, il gas torna nello stato A con una espansione isobara.



Completare il disegno del ciclo nel piano in figura, e calcolare:

(1) Il lavoro totale e il calore totale nel ciclo, specificando se si tratta di lavoro compiuto o subito e di calore ceduto o assorbito;

(2) La temperatura del gas nello stato A;

(3) La variazione di energia interna per andare dallo stato A allo stato C;

(4) Il calore totale scambiato nel transire dallo stato C allo stato A.

Esercizio 3

Una sfera uniformemente carica di raggio r = 10 cm con densità di carica volumica ρ = 1.70 · 10^{-3} C/m^3 è centrata nel punto O. Una particella di massa m = 3.00 g e con carica negativa q_1 = -6.00 · 10^{-7} C si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di centro O e raggio R = 80.0 cm. Trascurando la forza peso, determinare:

1) il modulo della velocità e il periodo della carica q_1;

2) l'energia totale della carica q_1;

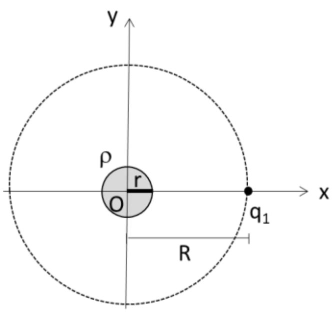


Figura 1

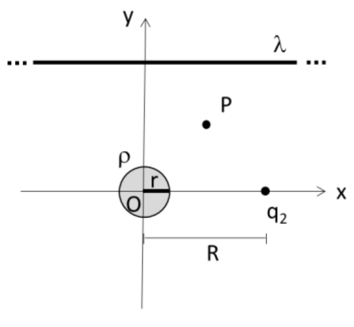


Figura 2

Si consideri ora una nuova configurazione (Figura 2) in cui la carica q_1 è stata sostituita dalla carica q_2 ferma nel punto di coordinate (R, 0). Sapendo che q_2 è uguale alla carica della sfera, calcolare:

3) il valore della densità di carica lineare λ di un filo infinito, posto parallelamente all'asse x a una distanza R da tale asse, tale che il campo elettrico sia nullo nel punto P di coordinate (R/2, R/2).

Soluzione esercizio 1:

(1) All'equilibrio, si ha che:

$R_x = -k\,\Delta x + T \sin\theta_0 = 0$
$R_y = T \cos\theta_0 - m_1\,g = 0$

da cui si ricava che:

$\mathrm{tg}\,\theta_0 = k\,\Delta x\,/(m_1\,g)$ e dunque $\theta_0 = 59.9° \approx 60.0°$
$T = m_1\,g/\cos\theta_0 = 8.80$ N

(2) All'istante t = 0 la pallina m1 si trova ad un'altezza $y_0 = L\,(1-\cos\theta_0) = 0.399$ m rispetto al piano orizzontale. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha che la velocità v_1 con cui la pallina raggiunge la verticale (il piano orizzontale) è:

$v_1 = (2\,g\,y_0)^{1/2} = 2.80$ m/s

(3) Nell'urto elastico, la pallina m_2, che inizialmente è ferma, acquista una velocità:

$v_2' = 2\,m_1\,v_1/(m_1+m_2) = 2\,v_1/3 = 1.86$ m/s

La sua energia meccanica alla base del piano inclinato è:

$E_{ini} = K_{ini} = 1/2\,m_2\,v_2'^2 = 1.57$ J

Alla sommità del piano inclinato, la pallina ha una energia cinetica:

$K_{fin} = 1/2\,m_2\,v_{2f}^2 = 0.253$ J

e un'energia potenziale:

$U_{fin} = m_2\,g\,h = 1.06$ J

dove $h = d \sin\alpha = 0.120$ m

Dunque l'energia meccanica alla sommità del piano inclinato è:

$E_{fin} = 1.31$ J

La differenza tra l'energia meccanica finale e l'energia meccanica iniziale è data dal lavoro della forza di attrito dinamico lungo il piano:

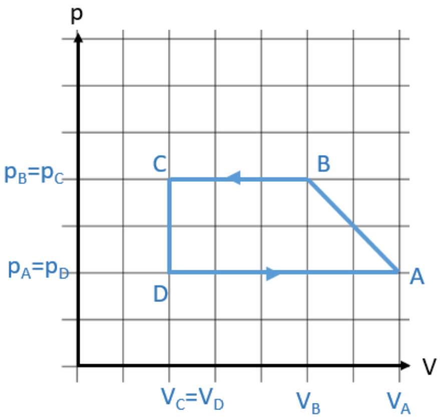
$E_{fin} - E_{ini} = L_{attr} = -\,\mu_d\,N\,d = -\,\mu_d\,m_2\,g \cos\alpha\,d$

da cui si ricava

$\mu_d = (E_{in} - E_{fin})/(m_2\,g \cos\alpha\,d) = 0.083$

Soluzione esercizio 2:

(1) Dati i valori di p e V in ogni punto, il ciclo è cosi' rappresentato:



In cui

V_A=70.0 m^3; V_B=50.0 m^3 ; V_C= V_D =20.0 m^3

e

p_B=1.01 10^5 Pa ; p_A = p_B/2 =0.505 10^5 Pa

In un ciclo, il lavoro è l'area racchiusa, quindi usando la formula dell'area di un trapezio (o sommando area di triangolo e rettangolo) si ottiene: L = 40 m^3 · p_A = 20.2 · 10^5 J.
Il ciclo è percorso in senso antiorario, quindi L<0 (lavoro subito, ovvero fatto dall'ambiente sul sistema). ΔU = 0 in un ciclo, quindi Q=L, con Q <0 (calore ceduto all'ambiente).

(2) Prima di usare pV = nR T nel punto A, occorre trovare il numero di moli del gas:

$$n = \frac{m\ (g)}{m_{1O_2}(u)} = \frac{19.2\ 10^3(g)}{2 \cdot 16(u)} = 600\ mol$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{0.505\ 10^5 \cdot 70}{600\ \cdot 8.314} = 709\ K$$

(3) ΔU = n c_v (T_C - T_A), con c_v per gas biatomici = 5/2 R e

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{1.01\ 10^5 \cdot 20}{600\ \cdot 8.314} = 405\ K$$

In alternativa, $T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{2p_A \frac{2}{7} V_A}{nR} = \frac{4}{7} T_A = 405\ K$

ΔU = n c_v (T_C - T_A)= 600 · 2.5 ·8.314 (405-709) = - 3.79 · 10^7 J

(4) Q_{CA}= Q_{CD} + Q_{DA} = n c_v (T_D – T_C) + n c_P (T_A – T_D),

con $T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = \frac{p_A \frac{2}{7} V_A}{nR} = \frac{2}{7} T_A = \frac{1}{2} T_C = 203\ K$ e c_P per gas biatomici = 7/2 R

Q_{CA}= 600 · 2.5 ·8.314 (203– 405) + 600 · 3.5 ·8.314 (709 – 203) = 6.33 10^6 J

Soluzione esercizio 3:

(1) Affinché la carica q_1 possa rimanere in moto circolare uniforme, è necessario uguagliare la forza elettrostatica (data dalla legge di Coulomb) alla forza centripeta.

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\, q_1}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3}{R}\frac{q_1}{m}} = 4.00\ m/s$$

Il periodo si calcola come segue:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 1.26\ s$$

(2) L'energia totale di q_1 è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, pertanto:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\varrho\right)q_1}{R} = \frac{1}{2}m\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\varrho\right)}{R}\frac{q_1}{m} - \frac{r^3\varrho q_1}{3\varepsilon_0 R} = \frac{r^3\varrho q_1}{6\varepsilon_0 R} - \frac{r^3\varrho q_1}{3\varepsilon_0 R} = -\frac{r^3\varrho q_1}{6\varepsilon_0 R}$$

$$= -2.40 \cdot 10^{-2} J$$

(3) Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico nel punto P lungo la componente è dato dalla somma del campo elettrico generato dalla sfera uniformemente carica e di quello generato dalla carica puntiforme, la cui somma deve essere nulla.

$$\mathrm{E}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cos 45° - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cos 45° = 0\ V/m$$

Sempre per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico lungo la componente y è dato dai campi elettrici generati dalla sfera uniformemente carica, la carica puntiforme e il filo infinito. Poiché il campo elettrico è nullo nel punto P, possiamo ricavare λ come segue.

$$\mathrm{E}_y = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cos 45° - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\frac{R}{2}} = 0\ V/m$$

$$\lambda = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2}\cos 45°\left(2\pi\varepsilon_0\frac{r}{2}\right) = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\pi\varepsilon_0\frac{R}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\frac{r^3\varrho}{R} =$$

$$= 1.26 \cdot 10^{-5}\frac{C}{m}$$