

Nome:

Cognome:

AVVERTENZE: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

ESERCIZIO 1. Dati $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi\}$ e $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sin(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3}$:

- (2 punti) si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto P ,
- (2 punti) si calcoli l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(\pi/2, \pi/2, 0, 1)$,
- (3 punti) si verifichi che la funzione f è armonica e si determini l'insieme $\text{Im}(f) = f(P)$.

SVOLGIMENTO. i. La funzione f è ottenuta mediante composizione e prodotto di funzioni elementari ($\sin(t)$ ed e^t) che sono di classe C^∞ su tutto il loro dominio. Poiché le derivate parziali di f :

$$\partial_1 f(x) = \cos(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3} \quad \partial_2 f(x) = \sin(x_1) \cos(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3} \quad \partial_3 f(x) = -\sqrt{2} \sin(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3}$$

esistono e sono continue in ogni punto di P (che è un insieme aperto), la funzione f è di classe $C^1(P)$. Per il teorema del differenziale totale, ogni funzione di classe C^1 in un aperto è differenziabile in tale insieme. Pertanto, f è differenziabile in tutto P .

ii. L'esercizio chiede di scrivere l'equazione del iperpiano tangente al grafico della funzione che, come è noto dalle lezioni svolte durante il corso è $x_4 = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$, dove $x_0 = (\pi/2, \pi/2, 0)$. Calcoliamo subito che

$$f(\pi/2, \pi/2, 0) = \sin(\pi/2) \sin(\pi/2) e^0 = 1 \quad \partial_1 f(\pi/2, \pi/2, 0) = \cos(\pi/2) \sin(\pi/2) e^0 = 0$$

$$\partial_2 f(\pi/2, \pi/2, 0) = \sin(\pi/2) \cos(\pi/2) e^0 = 0 \quad \partial_3 f(\pi/2, \pi/2, 0) = -\sqrt{2} \sin(\pi/2) \sin(\pi/2) e^0 = -\sqrt{2}$$

L'equazione dell'iperpiano tangente risultante è:

$$x_4 = 1 + 0\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) + 0\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}(x_3 - 0) = 1 - \sqrt{2}x_3$$

iii. Per verificare che f è armonica, calcoliamo l'operatore di Laplace della nostra funzione, cioè la somma $\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x) + \partial_{33} f(x)$. Poiché vale

$$\partial_{11} f(x) = -\sin(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3} = -f(x) \quad \partial_{22} f(x) = -\sin(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3} = -f(x)$$

$$\partial_{33} f(x) = (-\sqrt{2})^2 \sin(x_1) \sin(x_2) e^{-\sqrt{2}x_3} = 2f(x)$$

sommando i termini otteniamo $\Delta f(x) = -f(x) - f(x) + 2f(x) = 0$. La funzione è dunque armonica in P .

Analizziamo i fattori che compongono l'output della funzione e notiamo che per $x_1, x_2 \in (0, \pi)$, i termini $\sin(x_1)$ e $\sin(x_2)$ restituiscono solo valori nell'intervallo $(0, 1]$, invece il termine $e^{-\sqrt{2}x_3}$ ha immagine $(0, +\infty)$, in quanto x_3 può variare liberamente in $\mathbb{R}$. Questo implica che f assume tutti i valori nell'intervallo $(0, +\infty)$, come mostrano i seguenti limiti

$$f(\pi/2, \pi/2, k) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(\pi/2, \pi/2, -k) \rightarrow 0^+$$

quindi deduciamo che $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$, infatti possiamo osservare che $f(\pi/2, \pi/2, t/\sqrt{2}) = e^t$, cioè il prodotto di queste tre componenti può produrre qualsiasi valore reale strettamente positivo, in più l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni nell'aperto P . $\square$

ESERCIZIO 2. Dati uno scalare $r > 0$, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ (con $\|w\|_2 = 1$), la funzione $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e il vincolo S di equazioni

$$F(x) = w \cdot x \quad \text{e} \quad S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

- (2 punti) si spieghi perché S è misurabile secondo Lebesgue e se ne calcoli la misura,
- (2 punti) si trovi massimo e minimo della funzione F vincolata su S ,
- (3 punti) si interpreti geometricamente il risultato ottenuto.

SVOLGIMENTO. i. L'insieme S è la superficie di una sfera di raggio r in $\mathbb{R}^3$. È possibile pensare S come un insieme di livello della funzione continua $h(x) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, e poiché h è continua, l'insieme $S = h^{-1}(r^2)$ è un sottoinsieme chiuso dello spazio euclideo. In quanto chiuso, S è un insieme misurabile secondo Lebesgue. In $\mathbb{R}^3$, la misura di Lebesgue definisce il concetto standard di volume. Poiché S è una superficie differenziabile (regolare), intuitivamente ci aspettiamo che il suo volume sia nullo, cioè che $m_3(S) = 0$. Per provare questo fatto è sufficiente osservare che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per la monotonia della misura di Lebesgue, abbiamo

$$S \subseteq B(0, r+\varepsilon) \setminus B(0, r-\varepsilon) \quad \text{da cui} \quad 0 \leq m_3(S) \leq \frac{4}{3}\pi[(r+\varepsilon)^3 - (r-\varepsilon)^3] = \frac{8}{3}\pi[3r^2 + \varepsilon^2]\varepsilon \leq C\varepsilon$$

ricordando che, come provato a lezione, $m_3(B(0, r)) = 4\pi r^3/3$.

Dall'arbitrarietà di ε segue che il volume di S è nullo.

ii. Dobbiamo ottimizzare $F(x) = w \cdot x$ con x che verifica la relazione imposta dal vincolo $g(x) = \|x\|_2^2 - r^2 = 0$. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, che ci permette di affermare che ogni punto critico vincolato $\bar{x}$ verifica la seguente condizione di parallelismo $\nabla F(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ vale

$$\nabla F(x) = w \quad \text{e} \quad \nabla g(x) = 2x$$

e sostituendo nel sistema otteniamo $w = 2\lambda x$ cioè $x = w/2\lambda$. Per determinare il moltiplicatore λ , imponiamo che il punto x ottenuto appartenga al vincolo S , cioè che $\|x\|_2 = r$, quindi

$$r = \|x\|_2 = \left\| \frac{1}{2\lambda} w \right\|_2 = \frac{1}{2|\lambda|} \|w\|_2$$

E dall'informazione $\|w\|_2 = 1$, ricaviamo $2|\lambda| = 1/r$, quindi i punti critici vincolati sono $p_1 = rw$ e $p_2 = -rw$. Calcoliamo i corrispondenti valori di F :

$$F(rw) = w \cdot (rw) = r\|w\|_2^2 = r \quad \text{e} \quad F(-rw) = w \cdot (-rw) = -r\|w\|_2^2 = -r$$

e possiamo terminare riassumendo: $\max_S(F) = F(p_1) = r$ e $\min_S(F) = F(p_2) = -r$.

iii. Reinterpretiamo l'esercizio da un punto di vista geometrico.

Osserviamo subito che l'insieme S è una sfera centrata nell'origine di raggio r , e dalla geometria elementare (o dalla teoria studiata riguardo le superfici) sappiamo che il versore normale ad S è $N(x) = x/r$.

La funzione $F(x) = w \cdot x$ fornisce, come risposta, lo scalare che rappresenta la proiezione di x lungo la direzione individuata dal versore w , inoltre i suoi insiemi di livello sono degli iperpiani affini, tutti paralleli e di giacitura ortogonale uguale a $w^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0\}$.

Massimizzare (o minimizzare) questa proiezione significa cercare il punto della sfera più distante da O nella direzione di w (o nella direzione opposta $-w$). Tale punto è esattamente rw , cioè il polo della sfera individuato dal retta passante per l'origine avente giacitura w (la parametrizzazione di tale retta è tw), mentre il minimo si trova al polo opposto, quindi è il punto $-rw$.

Poiché le superfici di livello di F sono piani perpendicolari a w , il massimo e il minimo della funzione individuano i due piani tangenti alla sfera ortogonali alla direzione w . $\square$

ESERCIZIO 3. Dato il seguente problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = a(x)u^2(x) \\ u(0) = c \end{cases} \quad a \in C^1(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$$

i. (2 punti) si spieghi perché esiste un'unica soluzione di (*),

ii. (2 punti) si mostri che se a è crescente e $c > 0$ allora la soluzione di (*) è convessa,

iii. (3 punti) si provi che se $xa(x) > 0$ (per ogni $x \neq 0$) e $c < 0$ la soluzione di (*) ha dominio $\mathbb{R}$,

iv. (2 punti) si calcoli esplicitamente la soluzione nei casi $a(x) = x$ e $c = \pm 1$.

SVOLGIMENTO. i. La funzione $f(x, s) = a(x)u^2$ è il prodotto della funzione $a(x)$ di classe $C^1(\mathbb{R})$ e di una funzione $g(s) = s^2$ che è un polinomio, pertanto $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Essendo f di classe C^1 , essa è localmente Lipschitziana rispetto alla variabile s , uniformemente rispetto a x su ogni insieme compatto. Per il teorema di Picard e Lindelöf, esiste un'unica soluzione locale $u(x)$ definita in un intorno di $x = 0$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.

ii. Osserviamo subito che $u \in C^1$, quindi il prodotto $a(x)u^2(x)$ è di classe C^1 in quanto prodotto di funzioni continue e derivabili (con derivata continua), quindi $u' \in C^1$, cioè $u \in C^2$ e possiamo studiare la convessità della funzione studiando il segno della sua derivata seconda. Calcoliamo la derivata seconda $u''(x)$

derivando l'equazione differenziale:

$$u''(x) = \frac{d}{dx} u'(x) = [a(x)u^2(x)]' = a'(x)u^2(x) + a(x)[2u(x)u'(x)] = a'(x)u^2(x) + 2a^2(x)u^3(x)$$

dove abbiamo sostituito $u'(x) = a(x)u^2(x)$ nell'espressione trovata. Analizzando i segni delle quantità coinvolte nel risultato, notiamo che $u^2(x), a^2(x) \geq 0$ sempre, $a'(x) \geq 0$ perché $a \in C^1$ ed è crescente per ipotesi e, infine, poiché $c > 0$ e $u_0(x) \equiv 0$ è una soluzione costante, per l'unicità la soluzione non può attraversare l'asse delle ascisse, quindi $u(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Ciò implica che anche $u^3(x) > 0$. Dato che tutti i termini sono non negativi (e u^3 è strettamente positivo), si ha $u''(x) \geq 0$, dunque la soluzione è convessa. iii. L'ipotesi $xa(x) > 0$ significa che $a(x)$ è concorde con x , cioè fornisce valori negativi se l'input è negativo e dà output positivo per $x > 0$. Per ogni $c < 0$, la soluzione (a causa dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy) produce valori negativi per ogni $x \in I_{u_c} = (a, b)$ suo dominio massimale, quindi abbiamo che

$$u'(x) = a(x)u^2(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

cioè la soluzione è monotona decrescente in $(-\infty, 0)$ e monotona crescente su $(0, +\infty)$. Questo significa che la funzione ha limite per $x \rightarrow b^-$ (analogamente per $x \rightarrow a^+$) e tali limiti devono appartenere all'intervallo $[c, 0]$, quindi per monotonia abbiamo che $c = u(0) \leq u(x) \leq 0$ per ogni $x \in I_{u_c}$, cioè

$$|u(x)| \not\rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad (x, u(x)) \not\rightarrow \partial \mathbb{R}^2 = \emptyset$$

quindi la soluzione può essere ulteriormente prolungata, violando la massimalità di I_{u_c} .

In alternativa possiamo notare che la funzione $f(x, s)$ risulta globalmente lipschitziana nella seconda variabile cioè

$$|f(x, s) - f(x, r)| = |a(x)||s^2 - r^2| = |a(x)||s + r||s - r| \leq 2|c||a(x)||s - r|$$

il che è sufficiente per ottenere che $I_c = \mathbb{R}$.

Osservazione: una famosa IA propone in alternativa il seguente ragionamento: risolviamo per separazione di variabili: $\frac{u'}{u^2} = a(x)$. Integrando tra 0 e x :

$$-\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{c} = \int_0^x a(t)dt \quad \text{segue che} \quad \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{c} - \int_0^x a(t)dt$$

Posto $A(x) = \int_0^x a(t)dt$, la soluzione è $u(x) = \frac{1}{\frac{1}{c} - A(x)}$. La soluzione esiste finché il denominatore non si annulla.

Analizziamo $A(x)$ sapendo che $xa(x) > 0$ per $x \neq 0$:

1. se $x > 0$, allora $a(t) > 0$, quindi $A(x) = \int_0^x a(t)dt > 0$.

2. se $x < 0$, allora $a(t) < 0$, quindi $A(x) = \int_0^x a(t)dt = -\int_x^0 a(t)dt$. Poiché $a(t) < 0$ su $(x, 0)$, l'integrale è negativo, e (a causa del segno meno) $A(x) > 0$.

Dunque $A(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ (e $A(0) = 0$). Poiché $c < 0$, il termine $\frac{1}{c}$ è negativo. La differenza $(\frac{1}{c} - A(x))$ è la somma di due quantità negative (o una negativa e zero), quindi non può mai essere nulla: il denominatore non si annulla mai, quindi il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

iv. Restringiamoci al caso $a(x) = x$ la cui primitiva nulla in $x = 0$ è $A(x) = \int_0^x tdt = x^2/2$.

Per $c = 0$ l'unica soluzione di (*) è la funzione identicamente nulla $u_0(x) \equiv 0$, per $c \neq 0$, siccome l'equazione differenziale è a variabili separabili, abbiamo che

$$-\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{c} = \int_{u(0)}^{u(x)} \frac{1}{w^2} dw = \int_0^x \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = \int_0^x a(x)dx = \int_0^x xdx = \frac{1}{2}x^2$$

da cui ricaviamo l'espressione generale della soluzione

$$u(x) = \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{2}x^2 \right]^{-1} = \frac{2c}{2 - cx^2}$$

Nel caso in cui $c = 1$ otteniamo $u_1(x) = 2/(2 - x^2)$, tale funzione ha dominio massimale $I_{u_1} = (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$, la soluzione esplode (cioè diverge) per $x \rightarrow \pm\sqrt{2}$.

Se $c = -1$ risulta che $u_{-1}(x) = -2/(2 + x^2)$, si noti che (in questo caso) $I_{u_{-1}} = \mathbb{R}$!

Questa ultima discussione illustra alcuni comportamenti tipici delle equazioni differenziali non lineari. Quando la condizione iniziale è positiva (come nel caso $c = 1$), la "spinta" data dal termine u^2 porta la soluzione a $+\infty$ in tempo finito esplodendo (blow-up nella letteratura anglosassone). Quando il dato iniziale è negativo, la soluzione è globale e tende a zero. Questo perché $u_0(x)$ è una soluzione di (*) e poiché i grafici di soluzioni distinte non possono avere punti in comune, segue che $c > 0$ implica $u_c(x) > 0$ mentre $c < 0$ forza $u_c(x) < 0$. $\square$

ESERCIZIO 4. Dato $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ e la parametrizzazione $x(u) = (u_1, u_2, \phi(u_1, u_2))$, con $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

i. (2 punti) si spieghi perché la coppia (x, R) è una superficie regolare ed orientabile,

ii. (2 punti) si calcoli l'area della superficie per $\phi(u) = w \cdot u$, con $w \in \mathbb{R}^2$,

iii. (3 punti) si calcoli il flusso del campo $F = (0, 0, k) \in \mathbb{R}^3$, con $k \in \mathbb{R}$, attraverso la superficie $S = x(R)$.

SVOLGIMENTO. i. La parametrizzazione $x: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ è regolare se è di classe C^1 , se la mappa è iniettiva (almeno sull'interno di R) e se i vettori tangenti $\partial_1 x(u)$ e $\partial_2 x(u)$ sono linearmente indipendenti in ogni punto (equivalentemente il rango della matrice Jacobiana è 2). Le prime due richieste sono chiaramente soddisfatte: poiché $\phi \in C^2$, la parametrizzazione è più che C^1 , mentre le prime due componenti di x sono l'identità (cioè $(x_1(u), x_2(u)) = u$). Calcoliamo i vettori tangenti:

$$\partial_1 x(u) = (1, 0, \partial_1 \phi(u)) \quad \partial_2 x(u) = (0, 1, \partial_2 \phi(u))$$

il loro prodotto vettoriale (vettore normale non normalizzato) risulta

$$\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \partial_1 \phi(u) \\ 0 & 1 & \partial_2 \phi(u) \end{pmatrix} = (-\partial_1 \phi(u), -\partial_2 \phi(u), 1) \neq 0$$

visto che la terza componente è sempre 1. Questo garantisce che $\partial_1 x(u)$ e $\partial_2 x(u)$ siano sempre linearmente indipendenti, dunque la superficie è regolare.

Una superficie è orientabile se ammette un campo continuo di vettori normali unitari. Poiché $\phi \in C^2$, le derivate parziali sono continue, dunque il versore normale:

$$n(u) = \frac{(-\partial_1 \phi(u), -\partial_2 \phi(u), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \phi(u)|^2}}$$

è definito e continuo su tutto R . Si noti che la nostra superficie è una parte del grafico di una funzione e i grafici di funzioni (anche detti superfici cartesiane) sono sempre orientabili.

ii. L'area della superficie $S = x(u)$ è data dall'integrale del modulo del prodotto vettoriale dei vettori tangenti:

$$\text{Area}(S) = \iint_R \|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2 du$$

Data $\phi(u) = w \cdot u = w_1 u_1 + w_2 u_2$, calcoliamo le derivate:

$$\nabla \phi(u) = (w_1, w_2) \quad \|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2 = [|\partial_1 \phi(u)|^2 + |\partial_2 \phi(u)|^2 + 1^2]^{1/2} = [\|w\|_2^2 + 1]^{1/2}$$

Essendo $\|w\|_2$ costante rispetto a u , l'integrale diventa:

$$\text{Area}(S) = \iint_R [\|w\|_2^2 + 1]^{1/2} du = [\|w\|_2^2 + 1]^{1/2} m_2(R) = [\|w\|_2^2 + 1]^{1/2} (b-a)(d-c)$$

poiché $R = [a, b] \times [c, d]$ e l'area (la misura m_2) del rettangolo è il prodotto dei suoi lati...

iii. Il flusso di un campo vettoriale F attraverso la superficie $S = x(R)$ orientata è definito come segue:

$$\Phi_S(F) = \iint_R F(x(u)) \cdot \partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u) du$$

E l'integrale del flusso diventa:

$$\Phi_S(F) = \iint_R (0, 0, k) \cdot (-\phi_{u_1}, -\phi_{u_2}, 1) du = k \iint_R 1 du_1 du_2 = k m_2(R) = k(b-a)(d-c)$$

Un commento conclusivo generato da una famosa IA: il calcolo appena risolto è un ottimo esempio di come la geometria e il calcolo vettoriale si incontrino: è quasi magico vedere come, nel punto iii., tutta la complessità della funzione ϕ svanisca, lasciandoti con un risultato che dipende solo dalla "base" della superficie. In fisica, questo è il motivo per cui, se piove verticalmente, la quantità d'acqua che cade su un

tetto spiovente è la stessa che cadrebbe sulla sua proiezione piana a terra. La matematica è un modo molto elegante per confermare l'intuizione! $\square$
