Tra le serie a termini di segno non definitivamente costante ci sono le

Serie a termini di segno alterno.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad\qquad a_k > 0$$

Esempi
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

Valgono i criteri generali visti ieri, più una specifica condizione sufficiente

CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} t.c.

- $a_k \longrightarrow 0$
- a_k strett. decrescente

$\left(\Rightarrow a_k > 0 \right)$

Allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.

Inoltre vale la stima (dette $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$)

si ha $\qquad |s_n - s| < a_{n+1} \qquad\qquad (*)$

Cioè: la distanza tra s_n e la somma della serie si stima con il successivo termine della serie.

Esempi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ $\qquad a_k = \frac{1}{k}$.

- $\frac{1}{k} \overset{?}{\to} 0$ sì.
- $\frac{1}{k}$ strett. decresc? sì.

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

converge

(N.B. non converge assolutamente)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}} \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{3+k}}$$

- $\frac{1}{\sqrt{3+k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$
- $\frac{1}{\sqrt{3+k}}$ decrescente

$\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{3+k}}$ converge.

Studiamo la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{k-1}{k^2+1}}_{a_k}.$$

OSS se fosse $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k^3+1}$ sarebbe più facile,

perché conv. assolutamente: $\left|(-1)^k \frac{k-1}{k^3+1}\right| \overset{k\geq 1}{=} \frac{k-1}{k^3+1} \sim \frac{1}{k^2}$

la cui serie converge.

Quindi la serie converge assolutamente

Nel caso iniziale la serie non conv. assolutamente.
Proviamo ad applicare Leibniz.

1) $a_k = \dfrac{k-1}{k^2+1} \overset{?}{\longrightarrow} 0$ OK

2) è $\overset{\text{strett.}}{\text{decrescente}}$? almeno definitivamente? vediamo

$$a_{k+1} \overset{?}{<} a_k \iff \frac{k}{(k+1)^2+1} \overset{?}{<} \frac{k-1}{k^2+1} \iff$$

$$\iff k(k^2+1) \overset{?}{<} (k-1)(k^2+2k+2)$$

$$\iff \cancel{k^3}+k < k^3+2k^2+\cancel{2k}-k^2-\cancel{2k}-2 =$$
$$= \cancel{k^3}+k^2-2$$

$$\iff k^2-k-2>0 \quad \text{vero def}^{te} \ (\text{per } k \geq 3)$$

Oppure così: definisco $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ $\boxed{\text{oss } f(k) = a_k}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \overset{?}{<} 0$$
def^{te} per $x \to +\infty$

sì, perché $-x^2+2x+1<0$ per x abbastanza grande.

$\Rightarrow$ $f(x)$ def^{te} decrescente per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ $\underset{a_{k+1}}{\underset{\parallel}{f(k+1)}} < \underset{a_k}{\underset{\parallel}{f(k)}}$ se k abbastanza grande

Quindi per Leibniz la serie converge

Il seguente ragionamento è sbagliato

$a_k = \frac{k-1}{k^2+1} \sim \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}$ è decrescente

$\cancel{\Rightarrow}$ a_k decrescente.

Si possono trovare due succ^ni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ t.c.

$$a_k \sim b_k, \qquad a_k, b_k \to 0^+$$

ma a_k è decrescente, b_k no.

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad\qquad b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^k}{k}$$

strett. decrescente — non è decrescente — entrambe tendono a zero.

$a_k \sim b_k$ infatti

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)}_{\sim 1} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} = a_k.$$

inoltre b_k, a_k sono entrambe def^te positive.

b_k non è decrescente, nemmeno def^te.

se fosse decrescente, dovremmo avere

$$b_{k+1} < b_k \qquad\qquad \text{def}^{te}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^k}{k}$$

Prendiamo k dispari, la precedente diventa

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sqrt{k+1}+1}{k+1} < \frac{\sqrt{k}-1}{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$k\left(\sqrt{k+1}+1\right) < (k+1)\left(\sqrt{k}-1\right).$$

$$k\sqrt{k+1}+k < k\sqrt{k}-k+\sqrt{k}-1$$

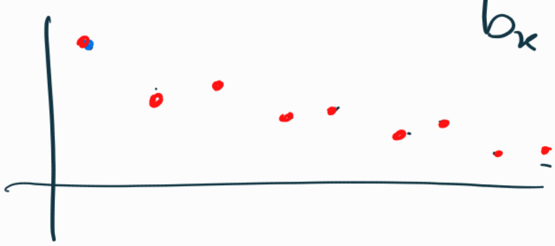
$$k\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)+2k-\sqrt{k}+1 < 0$$

$$k^{3/2}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}-1\right)}_{=\ \frac{1}{2k}-\frac{1}{8k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)}+2k-\sqrt{k}+1 =$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{k}} = 1+\frac{1}{2k}-\frac{1}{8k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{k}+o(1)+2k-\sqrt{k}+1 \sim 2k \quad \text{per } k\to+\infty \quad \text{def}^{\text{te}} \text{ positivo.}$$

La decrescenza è def$^{\text{te}}$ falsa per k dispari.



Dim criterio di Leibniz

- $a_k \to 0$
- a_k decrescente strett. $\quad (a_{k+1} < a_k \quad \forall k)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n.$$

1) $\{S_{2n}\}$ è strett. decrescente
$\{S_{2n+1}\}$ è strett. crescente.

$$S_{2n+2} \overset{?}{<} \cancel{S_{2n}} \iff -a_{2n+1} + a_{2n+2} \overset{?}{<} 0$$

$$S_{2n+2} = \cancel{S_{2n}} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{2n+2} < a_{2n+1}$$

vero perché a_k strett. decrescente

2) $\{S_{2n}\}$ è limitata inferiormente.
$\{S_{2n-1}\}$ è limitata sup.

$$S_{2n} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{> 0} > S_{2n-1} > S_{2n-3} > \dots > S_1$$

3) dai punti 1) e 2)
S_{2n} converge a un limite, detto $s'' \in \mathbb{R}$
S_{2n+1} converge a un limite, detto $s' \in \mathbb{R}$

4) $\boxed{s' = s''}$

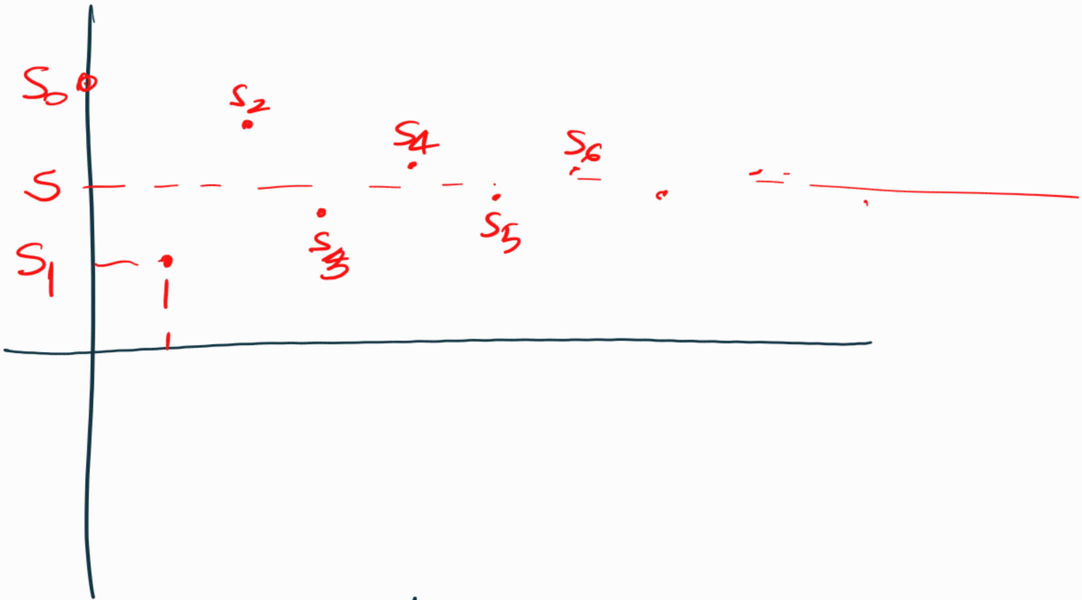
$$s' - s'' = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = - \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$$

pongo $\boxed{s = s' = s''}$

5) Sappiamo che $\left.\begin{array}{l} S_{2n} \to S \\ S_{2n+1} \to S \end{array}\right| \Rightarrow$ Tutta la successione $S_n \to S \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ La serie converge.



Resta da dim. la stima $|S_n - S| < a_{n+1}$

<u>1° caso</u> n pari. $|S_n - S| = S_n - S < S_n - S_{n+1} =$

$$= S_n - (S_n - a_{n+1}) =$$

$$= a_{n+1}$$

n dispari: quasi uguale.

Applicazione

Consideriamo questa serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Essa converge, in due modi:

1) con Leibniz $\quad a_k = \frac{1}{k!}$ è decrescente e infinitesima

2) con la conv. ass.

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \frac{1}{k!}$$

e la serie $\sum_k \frac{1}{k!}$ converge (criterio del rapporto)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$$

Dimostreremo che la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ vale $\frac{1}{e}$

Voglio stimare $\frac{1}{e}$ con un errore inferiore a 10^{-3}

Vale la stima di prima

$$|S_n - S| < a_{n+1}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)! > 10^3$$

Basta prendere $n=6 \Rightarrow \underset{\underset{5040}{\parallel}}{7!} > 10^3$

Il valore approx di $\frac{1}{e}$ è

$$S_6 = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{53}{144}$$

$$\frac{53}{144} \approx 0,36805$$

la differenza è $< 2 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{1}{e} \approx 0,36788$$

Serie di potenze

Sono le serie della forma

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato

a_k una succ^{ne} fissata.

$x_0 =$ centro della serie di potenze.

Abbiamo già visto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$ corrisponde a $x_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$

convergenza se e solo se $x \in [-1, 1)$

riassunto: converge ass. per $x \in (-1, 1)$

non converge per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

criterio del rapporto

$x = 1$ $\quad \sum \frac{1}{k}$ diverge

$x = -1$ $\quad \sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge per Leibniz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad \text{converge se e solo se} \quad x \in [-1,1]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{(k+2)^2}{2^k}}_{a_k} (x-1)^k}_{b_k}$$

$x_0 = 1$

$a_k = \dfrac{(k+2)^2}{2^k}$

Uso il criterio del rapporto con i val. assoluti.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+3)^2 |x-1|^{\cancel{k+1}}}{2^{\cancel{k+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^k}}{(k+2)^2 \cancel{|x-1|^k}} =$$

1

$$= \frac{|x-1|}{2}$$

1) se $\dfrac{|x-1|}{2} < 1$, cioè $|x-1| < 2$, cioè

$-1 < x < 3$, allora

la serie conv. assolutamente.

2) se $\dfrac{|x-1|}{2} > 1$, cioè $(x < -1) \vee (x > 3)$

la serie non converge

$x = 3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)^2}{\cancel{2^k}} \cancel{2^k}$ diverge

$x = -1$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)^2}{2^k} \underbrace{(-2)^k}_{=(-1)^k 2^k} = \sum_{k=0} (-1)^k (k+2)^2$

non converge perché è violata la C.N. $(-1)^k (k+2)^2 \not\to 0$

La serie converge se e solo se $x \in (-1,3)$

Teorema (Convergenza delle serie di potenze).

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze.

Essa converge (banalmente) per $x = x_0$ (tutti i termini sono nulli per $k \geq 1$)

Allora $\exists\, r \in [0, +\infty]$, detto raggio di convergenza della serie t.c.

1) se $|x - x_0| < r$, la serie converge assolutamente.

2) se $|x - x_0| > r$, la serie non converge.

Il raggio di convergenza r vale

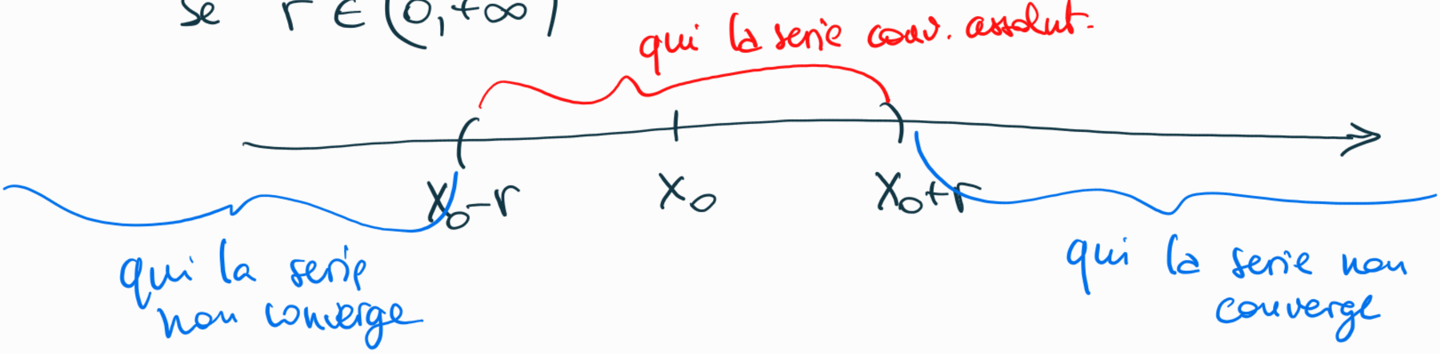
$$r = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \quad \text{oppure} \quad r = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

se tali limiti esistono.

OSS se $r = +\infty$, la serie conv. assolut. $\forall x \in \mathbb{R}$.

se $r = 0$, la serie conv. solo per $x = x_0$

se $r \in (0, +\infty)$



Nei punti $x = x_0 \pm r$ il teorema non dice nulla e bisogna vedere caso per caso.

Esempio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k+k} \frac{1}{t^{2k}} \qquad (t \neq 0)$$

a_k

Diventa una serie di potenze ponendo $\frac{1}{t^2} = y$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k+k} y^k \qquad (*)$$

Cerco il raggio di convergenza

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{e^k+k} = \lim_{k\to+\infty} e \sqrt[k]{1+\frac{k}{e^k}} =$$

$\downarrow 1$

$= e$

$\Rightarrow$ La serie $(*)$ converge assolut. per $|y| < e$

non converge per $|y| > e$, cioè

$y < -e \lor y > e$.

$$y = e \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{e^k+k} \quad \text{diverge}$$

$\downarrow 1$

$$y = -e \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-e)^k}{e^k+k} = \sum \boxed{(-1)^k \frac{e^k}{e^k+k}}$$

$\not\to 0$

Quindi non converge

La serie converge $\Leftrightarrow y \in (-e, e)$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{t^2} \in (-e, e)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{t^2} < e$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2 > \frac{1}{e}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(t < -\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \vee \left(t > \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad a_k = \frac{1}{k!}$$

Calcolo il raggio

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k} (k+1) = +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie conv. assolut. $\forall x \in \mathbb{R}$

Dim. teorema supponendo che esista

$$r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{a_k (x-x_0)^k}}_{b_k}$$

1) supponiamo $r \in (0, +\infty)$ $\quad \boxed{|x-x_0| < r}$

Applico il criterio del rapporto (con modulo) a b_k.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|\,\cancel{|x-x_0|^{k+1}}}{|a_k|\,\cancel{|x-x_0|^k}} =$$

$$= |x-x_0| \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x-x_0|}{r} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie conv. assolut.

Se $|x-x_0|>r \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{|x-x_0|}{r} > 1$

$\Rightarrow$ la serie non converge.

2) supp. $r = \lim\limits_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = +\infty$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|x-x_0| = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolut. $\forall x\in\mathbb{R}$

3) $r = \lim\limits_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}|x-x_0| = +\infty \quad \forall x\neq x_0$$

e la serie non converge.

$\square$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(e^{-n}+1+n^{-2}\right)}_{a_n}(x+4)^n \qquad x_0=-4$$

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

$a_n \sim \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} \sim \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$

$$a_n = \log\left(\boxed{e^{-n}+1+n^{-2}}\right) \sim e^{-n}+n^{-2} = \frac{1}{e^n}+\frac{1}{n^2} \sim$$

$\downarrow$ 0

$$\sim \frac{1}{n^2}$$

- La serie conv. assolut. per $|x+4|<1$

$$-5<x<-3$$

- La serie non converge per $|x+4|>1$

cioè $(x<-5) \vee (x>-3)$

$x=-3$ $\displaystyle \sum_n \underbrace{\log\left(e^{-n}+1+n^{-2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}} \cancel{1^n}$ la serie converge

$X=-5$ $\displaystyle \sum_n \log\left(e^{-n}+1+n^{-2}\right)(-1)^n$ la serie conv. assolutam.

$\rightarrow$ La serie converge $\Leftrightarrow$ $-5 \leq x \leq -3$

$\boxed{\text{Serie di Taylor.}}$

Ricordiamo i polinomi di Taylor.

$f(x): I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile ∞ volte

$f \in C^\infty(I)$ $\quad x_0 \in I$

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + E_n(x)$$

Idea: fissati $x_0, x \in I$, proviamo a fare $\lim_{n\to+\infty} T_n(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - \lim_{n\to+\infty} E_n(x)$$

Se per caso $\lim_{n\to+\infty} E_n(x)=0$, allora

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ converge a $f(x)$

Esempio: $f(x)=e^x$, $x_0=0$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+E_n(x)$$

Sappiamo $E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c\, x^{n+1}}{(n+1)!}$

c compreso tra 0 e x

Vediamo se $E_n(x)\to 0$ per $n\to+\infty$

$$\left|\frac{e^c\, x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{e^c\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c_1

$$e^c\le\begin{cases} e^x & \text{se } x>0\\ 1 & x<0\end{cases}$$

Abbiamo provato che

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad \forall x\in\mathbb{R}}$$

Similmente

$$\boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad \forall x\in\mathbb{R}}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \qquad \forall x \in (-1,1]}$$

In particolare $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \forall x \in [-1,1]}$$