

DEF  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in X$ .

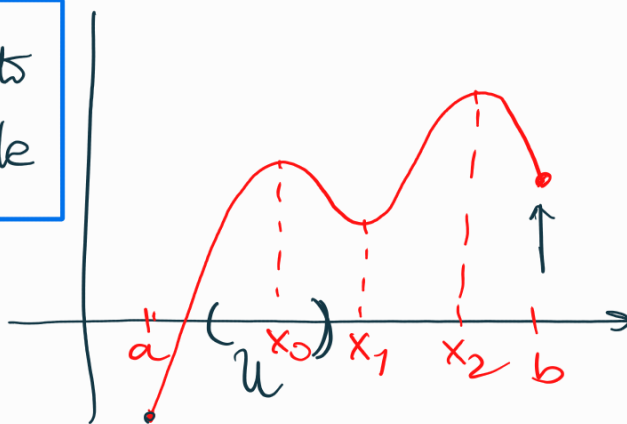
$x_0$  si dice pto di max assoluto  
min di  $f$  se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

$x_0$  si dice pto di max. locale  
min. (o relativo di  $f$ ) se

$$\exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap U$$

OSS Un min/max assoluto  
è anche min/max locale



$a$  = min assoluto (e locale)

$x_0$  = max. locale

$x_1$  = min. locale

$x_2$  = max. assoluto (e locale)

$b$  = min locale.

OSS In questo grafico  
nei pti  $x_0, x_1, x_2$   
la derivata di  $f$  è  
nulla.

## Teorema di Fermat (sugli estremi locali)

Siano  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $f$  derivabile in  $x_0 \in I$ ,  
sia  $x_0$  interno a  $I$  (cioè non è uno degli estremi dell'intervallo).

Se  $x_0$  è un punto di estremo locale di  $f$ .  
(cioè pto di max locale o min. locale),

allora  $f'(x_0) = 0$

Def. diremo che  $x_0$  è un pto critico (o stazionario) di  $f$  se  $f'(x_0) = 0$ .

Cosa dice il thm di Fermat?

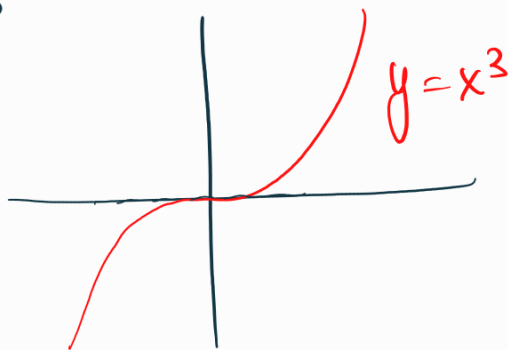
Se  $x_0$  è un punto interno di  $I$  in cui  $f$  è derivabile, allora

$x_0$  è pto di estremo locale di  $f \Rightarrow x_0$  è pto critico di  $f$ .

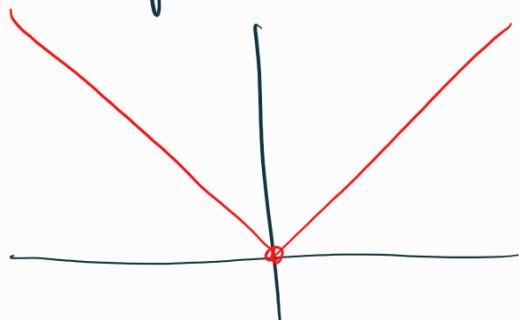
OSS la freccia si inverte?

No, infatti se prendo  $f(x) = x^3$  in  $I = \mathbb{R}$ .

$f'(0) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$  ma  $x=0$  non è di estremo locale



OSS Ci possono essere pti di max/min locale in cui  $f$  non è derivabile, per es.  $f(x) = |x|$  in  $x_0 = 0$ .



COROLLARIO Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervallo), e sia  $x_0 \in I$  un pto di max/min locale di  $f$ .

Allora vale di queste 3 possibilità:

- 1)  $x_0$  è un pto critico interno a  $I$  di  $f$  ( $f'(x_0)=0$ );
- 2)  $x_0$  è uno degli estremi dell'intervallo
- 3)  $x_0$  è un pto di non derivabilità.

### Conseguenza (Applicazione al teor. di Weierstrass)

Sia  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Per Weierstrass,  $f$  ammette max/min assoluti, che sono anche max/min locali.

Quindi i pti di max/min assoluti si trovano in una delle tre categorie del corollario precedente.

Esempio: Trovare max e min. assoluti di  
 $f(x) = x^3 - 5x + 1$  nell'intervallo  $[-1, 2]$ .

$f$  continua in  $[-1, 2]$ : per Weierstrass  $\exists$  max/min assoluti.

Dove stanno?

- 1) pti di non derivabilità: non ce ne sono.
- 2) estremi dell'intervallo:  $x = -1, x = 2$ .
- 3) pti critici interni.

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$



~~$x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$~~   
da escludere,  
non è nell'intervallo.

$f(x) = x^3 - 5x + 1$ . La calcolo nei tre pti trovati

$$f(-1) = -1 + 5 + 1 = 5 \quad (\text{max. assoluto})$$

$$f(2) = 8 - 10 + 1 = -1$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{5\sqrt{5} - 15\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + 1 =$$

$$= -\frac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} + 1 < -1 \quad (\text{min. assoluto})$$

$\uparrow$   
 $-2$

Esercizio: Calcoliamo max/min assoluti

$$\text{di } f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x - \frac{1}{2}\right| \quad (\text{nel suo dominio})$$

dom  $f = [-1, 1]$ . Vale il teor. di Weierstrass.

dove sono assunti max/min assoluti?

1) Estremi dell'intervallo  $x = 1, x = -1$ .

2) Pti di possibile non derivabilità:

$$x = \pm 1 \text{ (già considerato)}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

3) I pti critici interni.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \sqrt{1-x^2} - x + \frac{1}{2} & \text{se } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 & x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2}$$

$x > 0$  possiamo quadrare

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \begin{cases} +\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{OK} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{no} \end{cases}$$

$$x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x = \sqrt{1-x^2}$$

$$-x \geq 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pti candidati a max/min assoluto  $f(x) = \sqrt{1-x^2} + |x - \frac{1}{2}|$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ min assoluto.}$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 0,9$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2} \approx 1,9$$

max.  
assoluto

Esercizio: Controllare che  $x = \pm 1$  sono pti a tg. verticale

e  $x = \frac{1}{2}$  è pto angoloso

(ma non era necessario per trovare gli estremi abs.)

## dim. Teor. Fermat.

Sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0$  interno a  $I$  t.c.  
 $f$  derivabile in  $x_0$ , e  $x_0$  sia <sup>pt di</sup> ~~un~~ min. locale di  $f$ .

devo provare che  $f'(x_0) = 0$

Sia  $x > x_0$   $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  se  $x$  è suffte vicino a  $x_0$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

perm. del segno.

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_0) \geq 0}$$

ora prendo  $x < x_0$ , suffte vicino a  $x_0$ .

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0}$$

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

□

Oss Cosa succederebbe se il min locale fosse ottenuto in uno degli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ .

Se il min-locale è assunto in  $b$ , cosa succede?  
Posso fare solo la seconda parte della dim.

$$\Rightarrow f'(b) \leq 0$$

E se il min. fosse in  $a$ ?  $f'(a) \geq 0$ .

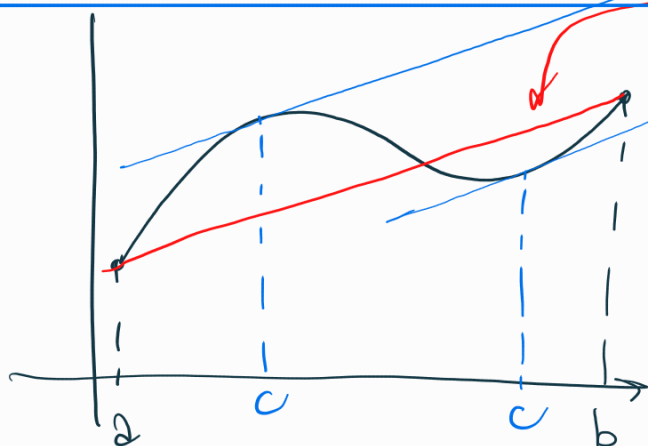
## Teorema di Lagrange.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua in  $[a, b]$

derivabile in  $(a, b)$

Allora  $\exists c \in (a, b)$  t.c.  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .



coefficiente angolare della retta rossa

Il teor. di Lagrange dice che c'è almeno un punto  $c$  t.c. la retta tg al grafico in quel punto sia parallela alla retta rossa.

Il caso in cui  $f(a) = f(b)$  si chiama teorema di Rolle.

## TEOREMA di ROLLE

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

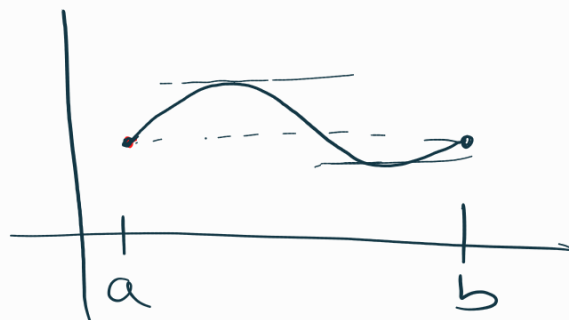
continua in  $[a, b]$   
derivabile in  $(a, b)$

t.c.  $f(a) = f(b)$

Allora  $\exists c \in (a, b)$  t.c.  $f'(c) = 0$ .

dim. Rolle

Per Weierstrass,  $f$  ammette max e min assoluti. Due possibilità:



1) max e min assoluti sono assunti negli estremi;

dove  $f$  ha lo stesso valore  $\Rightarrow f$  è costante  
 $\Rightarrow f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b)$ .

2) almeno uno tra max. e min. assoluto è assunto  
in un punto interno  $c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$ .  $\square$   
[Fermat]

Dim. Lagrange.



Pongo  $g(x) = f(x) - [\text{retta passante per } (a, f(a)), (b, f(b))]$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

$g$  verifica le ipotesi di Rolle.

$g$  continua in  $[a, b]$ ? sì, perché  $f$  lo è.

$g$  derivabile in  $(a, b)$ ? sì perché  $f$  lo è

$$g(a) \stackrel{?}{=} g(b).$$

$$g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (\cancel{a} - a) = 0$$

$$g(b) = \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \frac{\cancel{f(b)} - \cancel{f(a)}}{\cancel{b - a}} (\cancel{b} - a) = 0$$

Rolle  $\exists c$  t.c.  $f'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

## TEOREMA di CAUCHY

Siano  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue in  $[a, b]$ , derivabili in  $(a, b)$

Allora  $\exists c \in (a, b)$  t.c.

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

oss questa formula si scrive nella forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

se i denominatori  
sono  $\neq 0$ .

Dim si applica Rolle a

$$h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

□

## CRITERIO DIFFERENZIALE di MONOTONIA

Sia  $I$  intervallo,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$   
 $f$  derivabile nei pt interni di  $I$ . Allora:

$$1) f'(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Leftrightarrow f \text{ crescente in } I$$

$$2) f'(x) \leq 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Leftrightarrow f \text{ decrescente in } I$$

$$3) f'(x) > 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Rightarrow f \text{ strett. crescente in } I$$

$$4) f'(x) < 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Rightarrow f \text{ strett. decrescente in } I$$

Oss in 3) e 4) non vale l'implicazione  $\boxed{\Leftarrow}$

Infatti, per es.  $f(x) = x^3$  è strett. crescente in  $\mathbb{R}$   
ma  $f'(x) = 0$  in  $x = 0$ .

Dim 1)  $\boxed{\Leftarrow}$  2)  $\boxed{\Leftarrow}$  è uguale.

$f$  crescente in  $I \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x$  interno a  $I$

cioè  $\forall x_1, x_2 \in I$  t.c.  $x_1 < x_2$  si ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$

Siano  $x, x_0 \in I$   $x \neq x_0$ .

$$\text{se } x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Sia  $x_0$  interno.

Faccio il limite per  $x \rightarrow x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{per la perm. del segno}$$

Poiché  $x_0$  è un generico pto interno, ho finito.

Dim 1)  $\boxed{\Rightarrow}$  2)  $\boxed{\Rightarrow}$  3)  $\Rightarrow$  4)  $\Rightarrow$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x$  interno a  $I \Rightarrow f$  crescente in  $I$ .

$\forall x_1, x_2 \in I$  t.c.  $x_1 < x_2$  devo provare che  $f(x_1) \leq f(x_2)$

Uso Lagrange in  $[x_1, x_2]$   $f$  continua in  $[x_1, x_2]$   
 $f$  derivabile in  $(x_1, x_2)$

$\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) \text{ t.c.}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0 \quad \text{per ipotesi.}$$

$$\Downarrow x_2 - x_1 > 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \text{C.V.D.}$$

## CONSEGUENZA

$f$  costante in  $I$  intervallo  $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow$  già nota

$\Leftarrow$

se  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  crescente e decrescente in  $I$   
 $\Downarrow$   
 $f$  costante in  $I$ .

Proviamo che

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Poniamo  $f(x) = \arccos x + \arcsin x$  continua in  $[-1, 1]$ .

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{costante} = f(0) = \underbrace{\arccos 0}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arcsin 0}_0 = \frac{\pi}{2}$$

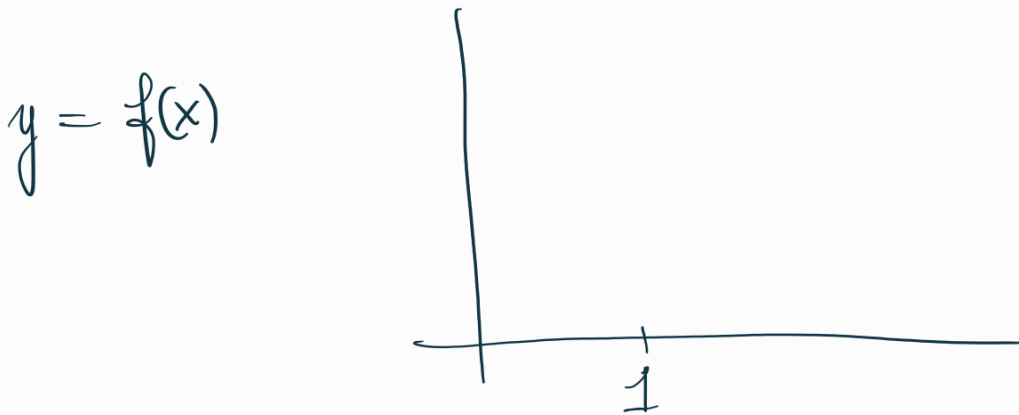
$$\Rightarrow \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Proviamo che

$$\log x \leq x - 1 \quad \forall x > 0.$$

$$f(x) = x - 1 - \log x \stackrel{?}{\geq} 0 \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$



$$f'(x) < 0 \quad \text{in } (0, 1) \Rightarrow f \text{ strett. decresc. in } (0, 1]$$

$$= 0 \quad \text{in } x = 1$$

$$> 0 \quad \text{in } (1, +\infty) \Rightarrow f \text{ strett. crescente in } [1, +\infty)$$

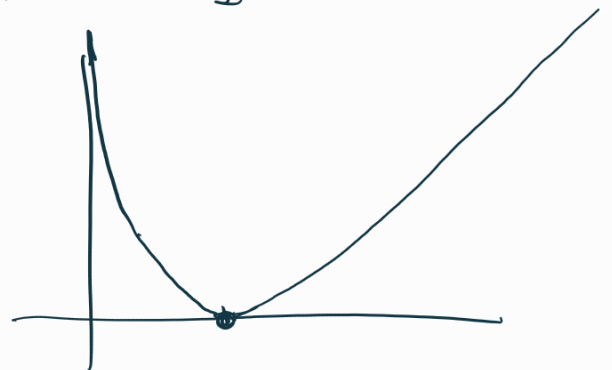
$f$  ammette min. assoluto in  $x = 1$

$$f(x) = x - 1 - \log x$$

$$f(1) = 1 - 1 - 0 = 0$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \log x \leq x - 1$$



$$\forall x > 0.$$

Esercizio: Provare che  $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .  
(per casa)

Esercizio: Trovare estremi locali e assoluti di

$$f(x) = x^3(1-x) = x^3 - x^4.$$

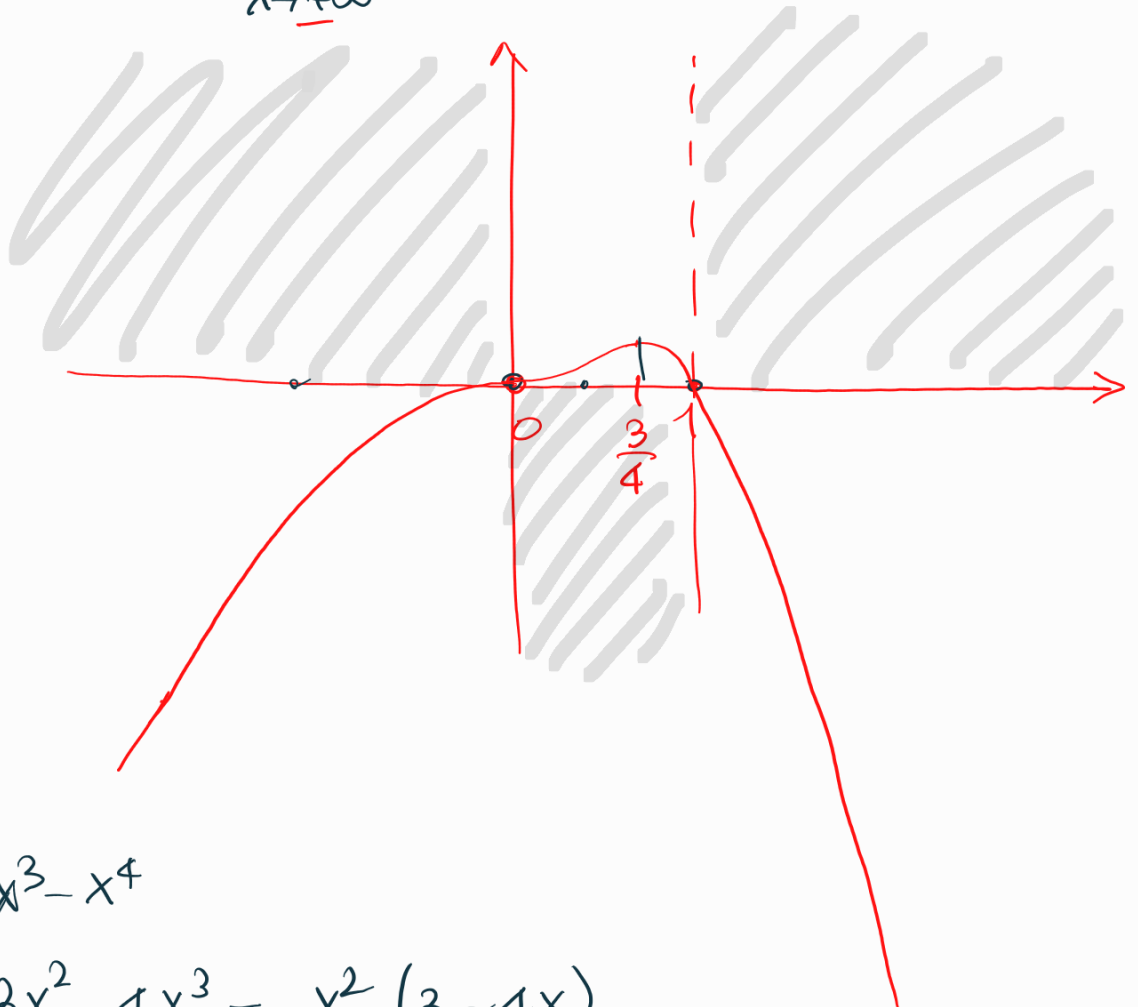
$$\text{dom } f = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$< 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^4) = -\infty$$



$$f(x) = x^3 - x^4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = \frac{3}{4}).$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}, x \neq 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

$$f \text{ strett. crescente in } (-\infty, 0] \text{ e in } [0, \frac{3}{4}] \quad \Bigg| \Rightarrow \quad f \text{ strett. crescente in } (-\infty, \frac{3}{4}]$$

$$f \text{ strett. decrescente in } [\frac{3}{4}, +\infty).$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ è pto di max. assoluto}$$

$$x = 0 \text{ è un pto critico, ma non è né di max né di min. locale.}$$