Fine del calcolo approssimato di $\sqrt{17}$ scrivendo

$$\sqrt{17} = 4\sqrt{1+x}\,\Big|_{x=\frac{1}{16}}$$

$$\left|E_n\left(\frac{1}{16}\right)\right| \leq \left|\binom{1/2}{n+1}\right| \frac{1}{2^{4n+2}} =$$

$$= \frac{\left|\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)\right|}{(n+1)!\;2^{4n+2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{(n+1)!\;2^{4n+2}} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\,2^{4n+2}\,(n+1)!} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(n+1)!\;2^{5n+3}}$$

$$\overset{?}{<} 10^{-6}$$

$$(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 10^6 \overset{?}{<} 2^{5n+3}(n+1)!$$

$n=4$

$$\underbrace{7\cdot 5\cdot 3}\cdot 10^6 \overset{?}{<} 2^{23}\cdot 120$$

$$105\cdot 10^6 \overset{?}{<} 2^{23}\cdot 120$$

vero!

Valore approx di $\sqrt{17}$:

$$T_4\left(\frac{1}{16}\right) = 4\sum_{k=0}^{4}\binom{1/2}{k}\frac{1}{2^{4k}}$$

Verificare che è effettivamente vicino a $\sqrt{17}$.

Numeri complessi

Sono somme formali del tipo $z = x + iy$
dove i è un simbolo t.c. $i^2 = -1$ (unità immaginaria)
$x, y \in \mathbb{R}$

$$z = x + iy$$

$\mathrm{Im}(z) =$ parte immaginaria di z.

$\mathrm{Re}(z) =$ parte reale di z

$$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\} = \{z = x + iy \,;\; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Operazioni tra numeri complessi:

se $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, allora

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(5 - 2i) + (1 + 3i) = 6 + i$$

$$(5 - 2i)(1 + 3i) = 5 + 15i - 2i \underbrace{- 6i^2}_{+6} = 11 + 13i$$

I numeri complessi $x + 0 \cdot i$ si indicano semplicemente come x. Le operazioni fatte su questo tipo di numeri coincidono con le operazioni sui reali.
Pertanto è naturale identificare i numeri reali con i numeri complessi della forma $x + 0i$

In questo senso scriveremo talvolta $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

I numeri della forma $0+iy$ $(y \in \mathbb{R})$ si scrivono anche nella forma iy e si dicono "immaginari puri"

Valgono le ordinarie proprietà (associativa, distributiva, commutativa) delle operazioni.

Se $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, il suo opposto è $-z = -x-iy$

$$z + (-z) = 0 + 0i = 0$$

$\forall z \neq 0$, cioè $z = x+iy$ con x e y non entrambi nulli

mostriamo che esiste il suo reciproco, detto $\frac{1}{z}$ oppure z^{-1} t.c.

$$z \cdot z^{-1} = 1 = 1 + 0i$$ (elemento neutro rispetto al prodotto)

$z = a+ib$ $(a, b$ reali non entrambi nulli)

Cerco $z^{-1} = x+iy$ t.c. $z \cdot z^{-1} = 1$

$$z z^{-1} = (a+ib)(x+iy) = 1$$

$$ax - by + i(bx+ay) = 1.$$

Eguagliamo parte reale e parte immaginaria

$$\begin{array}{l} b\times \\ a\times \end{array} \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

sistema lineare 2×2 nelle variabili x, y

Il determinante della matrice dei coefficienti vale $a^2 + b^2 \neq 0$ perché a, b non sono entrambi nulli

$\Rightarrow \exists!$ sol^{ne} (x, y)

$$a^2 y + b^2 y = -b \qquad y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$x = -\frac{ay}{b} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

se $z = a+ib \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$(2-5i)^{-1} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}\, i = \frac{2+5i}{29}$$

$$\frac{1}{2-5i} = \frac{1}{2-5i}\cdot\frac{2+5i}{2+5i} = \frac{2+5i}{2^2-(5i)^2} = \frac{2+5i}{4+25} =$$

$$= \frac{2+5i}{29}$$

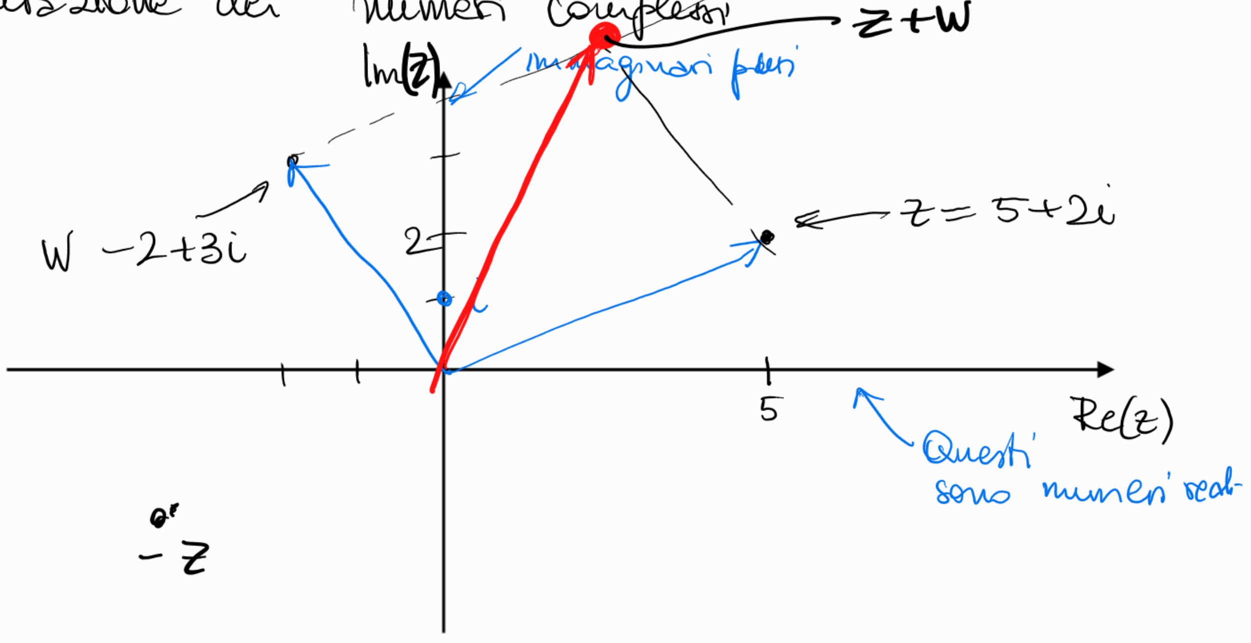
Nei numeri complessi non si può dare un ordinamento compatibile con le operazioni: <u>non scriveremo mai</u>

<u>$z \geq w$</u> se z, w sono complessi

Occasionalmente scriveremo $z \geq 0$

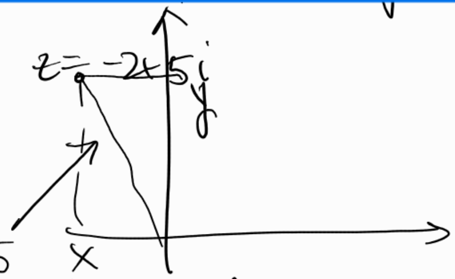
(significa $z \in \mathbb{R}$, e poi $z \geq 0$, cioè $z = x + 0i$, con $x \geq 0$)

Rappresentazione dei numeri complessi



DEF Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Definiamo il **modulo** di z come

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$ è un numero reale, non negativo.



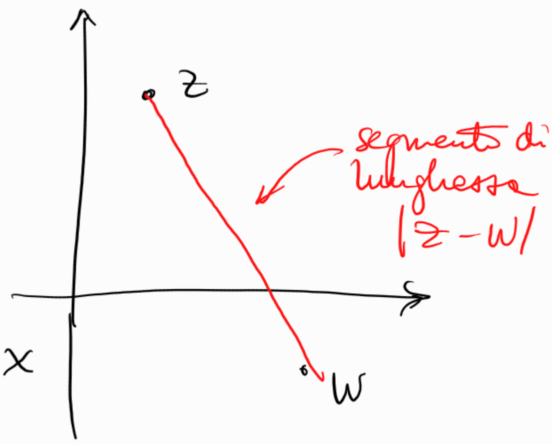
questo segmento ha lunghezza pari a $|z|$

$|z|$ si interpreta come "la distanza di z dall'origine".

Se $z, w \in \mathbb{C}$, come interpreto $|z-w|$?

$$\begin{array}{l} z = x+iy \\ w = a+ib \end{array} \Rightarrow |z-w| = |(x-a)+i(y-b)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$|z-w|$ si interpreta come distanza tra z e w.



Se $z \in \mathbb{R}$, cioè $z = x+0i$

$|z|$ coincide con il valore assoluto di x

Proprietà del modulo

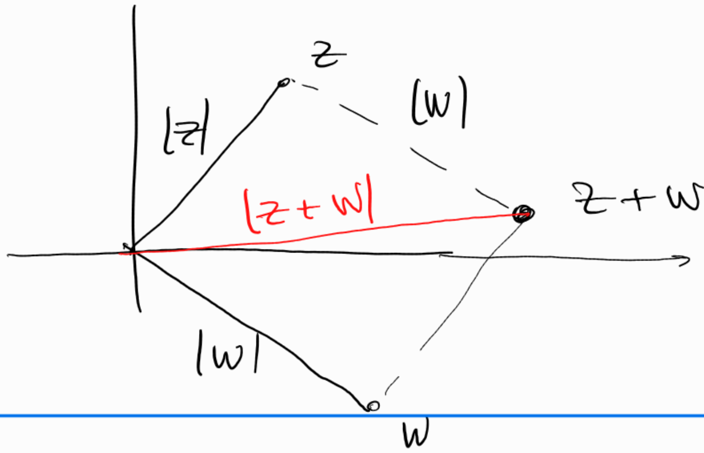
1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z \cdot w| = |z||w|$

verifica facile

4. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

5. $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

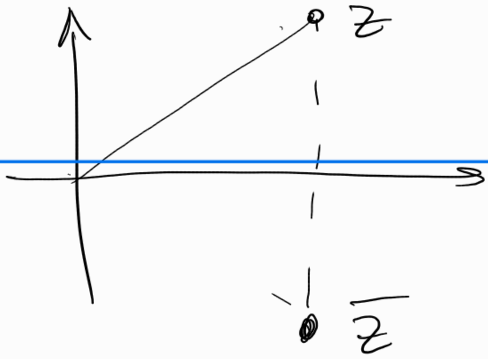
disuguaglianza triangolare



DEF Dato $z = x+iy \in \mathbb{C}$ $(x,y \in \mathbb{R})$

si dice **coniugato di z** il numero

$\bar{z} = x - iy$



Proprietà del coniugio:

1. $\overline{(\bar{z})} = z$

2. $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$ immediato

3. $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

$$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ w = a+ib \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} zw = ax - by + i(bx+ay) \\ \overline{zw} = ax - by - i(bx+ay) \end{array}$$

uguali

$$\bar{z}\,\bar{w} = (x-iy)(a-ib) =$$

$$= ax - by + i(-bx - ay)$$

4° $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

5. $\boxed{z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2}$

6, $\frac{1}{z} = \frac{1}{z\overline{z}}\overline{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$$\frac{1}{3-2i} = \frac{1\,(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{13}$$

Calcolare $\frac{3-5i}{1+i}$

$$\frac{3-5i}{1+i} = \frac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-5+i(-5-3)}{2} =$$

$$= \frac{-2-8i}{2} = -1-4i$$

Importante: Nei numeri complessi

$\boxed{z^2 \neq |z|^2}$ (diversamente dai numeri reali)

$z = 1+i \implies z^2 = (1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$

i^2

$$|z|^2 = 1^2+1^2 = 2$$

Importante: la parte immaginaria di un numero complesso è un numero reale

$$\text{Im}\, z = \text{Im}\,(x+iy) = y \in \mathbb{R}$$

Equazioni nei numeri complessi.

$$\boxed{z + i(\overline{z})^2 = -2i}$$

$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$(\overline{z})^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

L'eq^{ne} diventa

$$x + iy + i(x^2 - y^2 - 2ixy) = -2i$$

$$x + iy + ix^2 - iy^2 + 2xy = -2i$$

Eguagliamo separatamente parte reale e parte immag.

$$\begin{cases} x + 2xy = 0 \\ y + x^2 - y^2 = -2 \end{cases} \quad \xrightarrow{y=-1/2} \quad -\frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{4} = -2$$

Un'equazione nei complessi corrisponde a un sistema di 2 equazioni nella x e nella y.

$x(1+2y) = 0$ — $x = 0$ oppure $y = -1/2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \cancel{\begin{cases} y = -1/2 \\ x^2 = -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{cases}}$$

impossibile nei reali

nessuna sol^{ne}

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Sol^{ni}

$(x, y) = (0, -1) \iff \boxed{z = -i}$

$(x, y) = (0, 2) \iff \boxed{z = 2i}$

$$z+\bar{z}-3\,\mathrm{Im}(z)=z^2+|z|$$

$$z=x+iy,\quad \bar{z}=x-iy,\quad \mathrm{Im}(z)=y$$

$$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,\quad |z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

L'eq^{ne} diventa

$$x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}-3y=x^2-y^2+2ixy+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2} \\ 0=2xy \end{cases}$$

$$xy=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -3y=-y^2+|y| \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ 2x=x^2+|x| \end{cases}$$

sol^{ni} del 1° sist. $(0,0),(0,4)$ sol^{ni} del 2° sistema $(0,0)$ e $(1,0)$

$-3y=-y^2+|y|$ risolvo quest'eq^{ne}

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ -3y=-y^2+y \end{cases} \vee \begin{cases} y<0 \\ -3y=-y^2-y \end{cases}$$

$$y^2-4y=0 \qquad\qquad y^2-2y=0$$

$y=0$, $y=4$ accettabili

$y=0$, $y=2$ non accettabili

$$2x=x^2+|x|$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x=x^2+x \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ 2x=x^2-x \end{cases}$$

$x^2-x=0$ $\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}}$ accettabili

$x^2-3x=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ non accett.

Sol^{ni} dell'equazione: $z = 0$, $z = 4i$, $z = 1$.