

# Sistemi di punti

Cercheremo quindi di introdurre **quantità globali del sistema**, ottenute attraverso sommatorie su tutti i punti del sistema, che permettano di rappresentarne lo stato di moto

Queste quantità sono sostanzialmente tre:

- un punto geometrico (attenzione, non un punto materiale), **il centro di massa**, che dia la migliore rappresentazione della posizione del sistema
- **la quantità di moto** totale (semplicemente la somma vettoriale di tutte le quantità di moto dei punti del sistema)
- **il momento angolare totale** (di nuovo, semplicemente la somma di tutti i momenti angolari dei punti del sistema)

Il passo successivo sarà di mettere in relazione queste quantità con l'insieme di forze a cui il sistema è soggetto

C'è ancora un problema: quanto detto sopra si riferisce ad un sistema discreto di punti: abbiamo parlato di somma su tutti i punti

In effetti, nella concezione atomistica, sarebbe ragionevole considerare gli atomi come i “punti materiali elementari”

Tuttavia gli atomi sono a loro volta composti, etc. etc.

# Sistemi continui

Comunque, avremmo sempre a che fare con un numero enorme di punti, che ci impedirebbe di eseguire effettivamente i calcoli.

Una volta che avremo individuato in linea di principio le proprietà di queste grandezze che caratterizzano il moto di un sistema, comunque grande, di punti materiali, dovremo usare una approssimazione:

un numero molto grande di punti distribuito su un volume finito, ma piccolo a piacere rispetto alle dimensioni degli oggetti che vogliamo studiare, può essere approssimato con una distribuzione uniforme di massa all'interno di quel volume, ossia da un “sistema continuo”

Possiamo introdurre la “densità di massa” media di un certo  $\Delta V$ :

$$\rho_m^{\Delta V} = \frac{\sum_i^{\Delta V} m_i}{\Delta V} \text{ dove la sommatoria si estende a tutti i punti (a tutti gli$$

“atomi”) contenuti nel volume  $\Delta V$ . Facendo tendere  $\Delta V$  a zero, possiamo

definire la densità in funzione del punto:  $\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$

Per calcolare le quantità globali di un sistema continuo, dovremo integrare su tutto il volume occupato dal sistema

# Centro di massa (FMUV 7.2.1)

definiamo il centro di massa (c.d.m.) di un sistema di  $n$  punti materiali,

ciascuno di massa  $m_i$   $\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$  media pesata delle posizioni

o, in coordinate cartesiane,

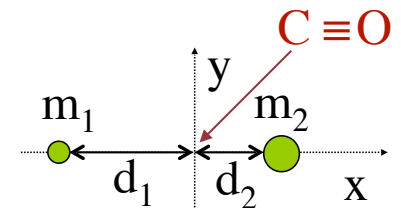
$$x_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

Il centro di massa gode della **proprietà distributiva**, per cui dividendo un sistema in due sottosistemi si ha:

$$\vec{r}_C = \frac{M_1 \vec{r}_{C_1} + M_2 \vec{r}_{C_2}}{M_1 + M_2}$$

Il centro di massa di due punti giace sulla congiungente, a distanza **inversamente proporzionale** dalle due masse:

$$x_C = \frac{-m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow -m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0 \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$



Il centro di massa di un sistema finito di punti si può costruire applicando la costruzione precedente a due punti, e aggiungendo via via un punto alla volta, utilizzando la proprietà distributiva

## Centro di massa dei sistemi continui (FMUV 7.2.2)

Il centro di massa di un **sistema continuo** si può definire scomponendo il sistema in sottosistemi di dimensioni piccole rispetto al sistema completo e passando al limite di sottosistemi infinitesimi:

$$\vec{r}_C \simeq \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume  $V$  del sistema e per densità uniforme diventa:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad \left( x_C = \frac{1}{V} \int x dx dy dz, \text{ etc.} \right)$$

e quindi per densità uniformi il centro di massa dipende solo dalla forma geometrica del sistema.

Per distribuzioni di massa superficiali o lineari, si possono introdurre analogamente le **densità superficiali** o **lineari**:  $dm = \sigma dS$ ,  $dm = \lambda dl$  e l'integrale di volume sarà sostituito da un integrale di superficie o di linea.

# Centro di massa di un triangolo isoscele

$$\vec{r}_C = \frac{\int_S \vec{r} dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S \vec{r} \sigma dx dy}{M} \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{S}$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \int_S \vec{r} \sigma dx dy = \frac{1}{M} \int_S \frac{M}{S} \vec{r} dx dy = \frac{1}{hr} \int_S \vec{r} dx dy$$

$$x_C = \frac{1}{hr} \int_S x dx dy = \frac{1}{hr} \int_0^h dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x dx \quad \text{con} \quad x_1 = -\frac{r}{h}y \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{r}{h}y$$

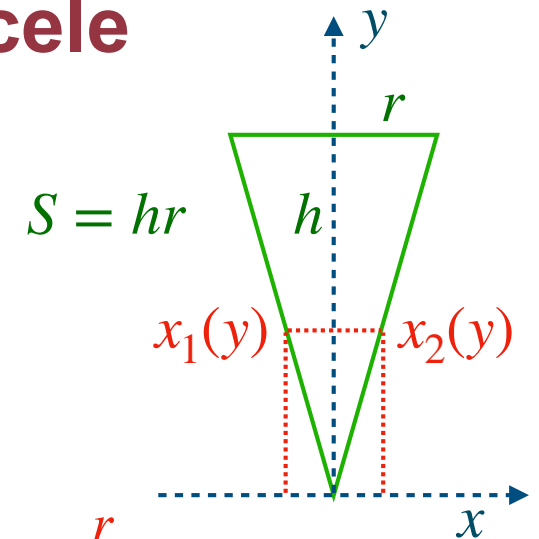
$$= \frac{1}{hr} \int_0^h dy \int_{-\frac{r}{h}y}^{\frac{r}{h}y} x dx = \frac{1}{hr} \int_0^h dy \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-\frac{r}{h}y}^{\frac{r}{h}y} = 0$$

come ci si poteva aspettare per la **simmetria** rispetto all'asse delle  $y$ .

$$y_C = \frac{1}{hr} \int_S y dx dy = \frac{1}{hr} \int_0^h y dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx = \frac{1}{hr} \int_0^h y dy \int_{-\frac{r}{h}y}^{\frac{r}{h}y} dx = \frac{1}{hr} \int_0^h y dy \left[ x \right]_{-\frac{r}{h}y}^{\frac{r}{h}y} =$$

$$= \frac{1}{hr} \int_0^h 2 \frac{r}{h} y^2 dy = \frac{2}{h^2} \int_0^h y^2 dy = \frac{2}{h^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{2}{3} h$$

Si noti che il cono che si ottiene per rotazione del triangolo isoscele ha il c.d.m. più in alto, a  $\frac{3}{4}h$



## Quantità di moto e moto del c.d.m. (FMUV 7.3)

Quantità di moto totale  $\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

se deriviamo rispetto al tempo la posizione del c.d.m.

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{Q}}{M}$$

otteniamo il **primo teorema del c.d.m.**: “la quantità di moto totale di un sistema è uguale al prodotto della massa totale per la velocità del c.d.m.”:  $\vec{Q} = M \vec{v}_C$

Se ora applichiamo il secondo principio a ciascuno dei punti materiali del sistema, indicando con  $\vec{f}_i$  la risultante di tutte le forze che agiscono sul punto i-esimo del sistema, e sommiamo su tutti i punti, abbiamo:

$$\vec{F} = \vec{F}^e + \cancel{\vec{F}^i} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Nella somma di tutte le forze che agiscono sul sistema compaiono sia le forze esterne al sistema, sia **le forze interne** tra i vari punti del sistema, che tuttavia **si annullano a due a due** per il terzo principio

## Secondo teorema del centro di massa

Indicando con  $F^e$  la risultante di tutte e sole le forze esterne che agiscono su tutti i punti del sistema abbiamo la **prima “equazione cardinale”** della meccanica dei sistemi:

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

che può essere riscritta come

$$\vec{F}^e = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = M \vec{a}_C$$

che prende il nome di **secondo teorema del c.d.m.**:

“il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema.”

Per un sistema **isolato**, la quantità di moto è **costante**  
(esempi: rinculo, reazione...)

I due teoremi del c.d.m. dimostrano a posteriori l'applicabilità del **concetto di punto materiale** (esempi) rimuovendo l'ambiguità delle dimensioni del corpo modellizzato come punto materiale