Cognome:................................ Nome:....................................
Data orale: ☐ 25-1................ ☐ 18-2................

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

-

II ESONERO
A
12 gennaio 2016

15

Esercizio 1

Siano X e Y due v.a. indipendenti. X è Uniforme in $[-1,1]$, mentre Y è Uniforme in $[0,1]$. Sia inoltre

$$U = \frac{X}{\max\{X, Y\}}.$$

i) Determinare il supporto della v.a. U. 3
ii) Calcolare la funzione di ripartizione di U. 8
iii) Rappresentare il grafico della funzione di ripartizione e commentarlo. 4

Esercizio 2

15

Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite come Poisson di parametro λ.
i) Si studi la convergenza delle seguenti successioni:

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad 2$$

$$W_n = \frac{(X_1^2 - X_1) + ... + (X_n^2 - X_n)}{n} \quad 4$$

$$Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n-2} \quad 4$$

ii) Calcolare il $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \geq 2\lambda)$. 3
iii) Determinare la distribuzione della v.a. Z_n, per ogni n fissato. 2

SOLUZIONI (A) (1)

Es. 1 $\quad X \sim \text{Unif}[-1,1]$ $\quad U = \dfrac{X}{\max(X,Y)}$

$Y \sim \text{Unif}[0,1]$

$U \in (-\infty, 1]$ q.c. $\qquad f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1_{(x,y)\in R}}{\text{area}(R)} = \frac{1}{2} 1_{(x,y)\in R}$

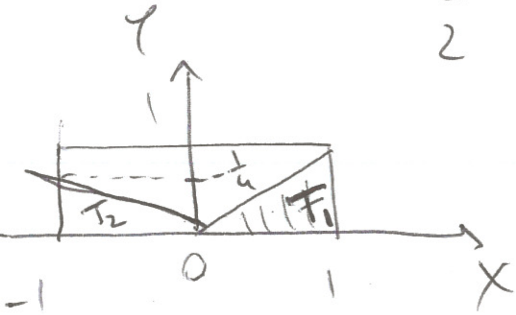
se $X \geq Y \Rightarrow U = 1$ q.c.

" $X < Y \Rightarrow U = \dfrac{X}{Y}$

Quindi ho mistura e $P(U=1) = P(X \geq Y) =$

$= P(X \geq Y, X \in (0,1)) + \cancel{P(X \geq Y, X \in (-1,0))}$

$= \frac{1}{2} \text{area}(T_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



Per $u \in (-\infty, 1)$

$F_U(u) = P(U < u) = \underbrace{\cancel{P\left(\frac{X}{X} < u, X \geq Y\right)}}_{=0} + P\left(\frac{X}{Y} < u, X < Y\right)$

$= P\left(\frac{X}{Y} < u, X < Y, X \in (-1,0)\right) +$

$+ P\left(\frac{X}{Y} < u, X < Y, X \in (0,1)\right)$

$= P\left(\frac{X}{Y} < u, X \in (-1,0)\right) + P\left(\frac{X}{Y} < u, X \in (0,1)\right)$

$= P(X < uY, X \in (-1,0)) + P(X < uY, X \in (0,1))$

Devo distinguere $-\infty < u < -1$ e $-1 < u < 0$

$-\infty < u < -1$

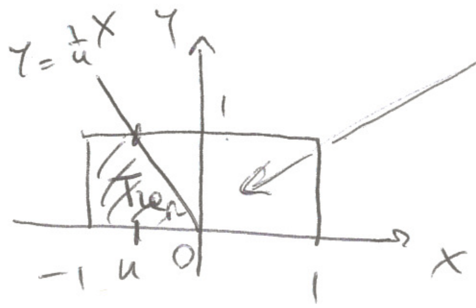
$$= P(X < uY,\ X \in (-1,0)) = \frac{1}{2} \text{Area}(T_2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2u}\right)$$

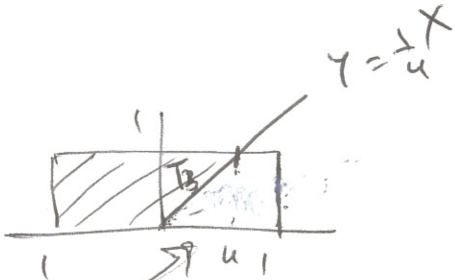
$$= -\frac{1}{4u} > 0$$

$-1 < u < 0$

$$= \frac{1}{2} \text{Area}(T_{rep}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-u)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{u}{4}$$





Per $0 < u < 1$

$$\dots = P(X < uY,\ X \in (0,1)) + P(X < uY,\ X \in (-1,0))$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{u}{2} = \frac{1}{2} + \frac{u}{4}$$

Quindi

$$F_U(u) = \begin{cases} -\frac{1}{4u} & u \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{u}{4} & -1 \leq u \leq 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

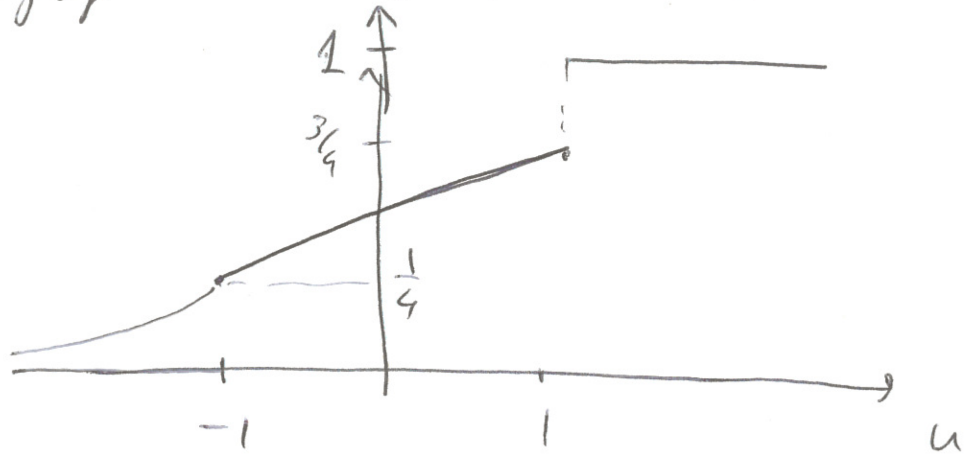
Verifiche

per $u \to -\infty$ $F_U(u) \to 0$

$F_U(-1^-) = \frac{1}{4} = F_U(-1^+)$

$F_U(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow F_U(1^+) - F_U(1) = \frac{1}{4} = P(U=1)$

Grafico della f.r.



B

Es. 2 $\quad X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ i.i.d.

i) $\boxed{Z_n \xrightarrow{q.c.} E(X_i)} = \boxed{\lambda}$ per il LFGN

Infatti $$E(X_i) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda e^{-\lambda+\lambda} = \lambda$$

e $V(X_i) < \infty$.

$$\boxed{W_n \xrightarrow{p.c.}} E(X_i^2 - X_i) = \boxed{\lambda^2}$$

infatti $$E(X_i^2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$
$$= \lambda + \lambda^2$$

$$Y_n = Z_n \cdot \frac{n}{n-2}$$

e quindi, per il teorema delle funzioni continue e per il teorema sulle conv. p.c. di vettori

$$\left(Z_n, \frac{n}{n-2}\right) \xrightarrow{p.c.} (\lambda, 1) \Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{p.c.} \lambda}$$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \geq 2\lambda) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - F_{Z_n}(2\lambda)\right]$

ma poiché conv. p.c. $\Rightarrow$ conv. i.d.

$$F_{Z_n}(z) \to F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq \lambda \\ 1 & z > \lambda \end{cases}$$

quindi $F_{Z_n}(2\lambda) \to F_Z(2\lambda) = 1$

e $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \geq 2\lambda) = 0$

(iii) $Z_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ dove $X_i \sim Pois(\lambda)$ indip.

ma $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda\right) = Pois(n\lambda)$ $\Rightarrow Z_n \left\{\frac{j}{n}, p_j, j=0,1,\ldots\right\}$ con $p_j = \frac{e^{-n\lambda}}{j!}(n\lambda)^j$

~~e $P(Z_n < t) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < nz\right)$~~

~~ovvero $\Phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\, e^{\frac{it}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(e^{\frac{it}{n}}-1\right)}$~~

Cognome:................................ Nome:....................................
Data orale: ☐ 25-1................ ☐ 18-2................

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

-

II ESONERO
B
12 gennaio 2016

15

Esercizio 1

Siano X e Y due v.a. indipendenti. X è Uniforme in $[-1, 1]$, mentre Y è Uniforme in $[0, 1]$. Sia inoltre

$$V = \frac{\min\{X, Y\}}{Y}.$$

i) Determinare il supporto della v.a. V. 3
ii) Calcolare la funzione di ripartizione di V. 8
iii) Rappresentare il grafico della funzione di ripartizione e commentarlo. 4

15

Esercizio 2

Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. indipendenti e identicamente distribuite come Binomiali di parametri k, p, con $k \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.

i) Si studi la convergenza delle seguenti successioni:

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$ 2

$$W_n = \frac{(X_1^2 - X_1) + ... + (X_n^2 - X_n)}{n}$$ 4

$$Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n - 2}$$ 4

ii) Calcolare il $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \geq (k + 1)p)$. 3
iii) Determinare la distribuzione della v.a. Z_n, per ogni n fissato. 2

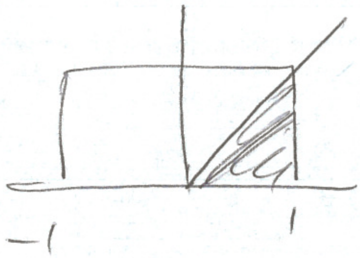
SOLUZIONI (B)

ES. 1

$$V = \frac{\min(X,Y)}{Y} \qquad V \in (-\infty, 1) \text{ q.c.}$$

$$X \geq Y \qquad V = 1$$

$$X < Y \qquad V = \frac{X}{Y} < 1$$



$$P(V=1) = P(X \geq Y) =$$

$$= P(X \geq Y, X \in (0,1)) + \cancel{P(X \geq Y, X \in (-1,0))}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$F_V(v) = P(V < v) = P(X < vY, X < Y)$$

$$= P(X < vY, X < Y, X \in (-1,0)) +$$

$$+ P(X < vY, X < Y, X \in (0,1))$$

$$= P(X < vY, X \in (-1,0)) + P(X < vY, X \in (0,1)$$

CONTINUA A PAG. 2 DEL COMPITO A

ES. 2 B $X_i \sim Bin(k,p)$

2

i) per la LFGN $\boxed{Z_n \xrightarrow{p.c.}} \mathbb{E}(X_i) \boxed{= kp}$

poiché la $V(X_i) < \infty$

$$\boxed{W_n \xrightarrow{p.c.}} \mathbb{E}[X_i^2 - X_i] = \boxed{k(k-1)p^2}$$

Infatti
$$\mathbb{E}[X_i^2 - X_i] = \mathbb{E}[X_i(X_i-1)]$$
$$= \sum_{j=2}^{k} j(j-1)\binom{k}{j} p^j q^{k-j}$$
$$= \sum_{j=2}^{k} \frac{k(k-1)(k-2)!}{(j-2)!\,(k-j)!} p^j q^{k-j}$$

$j-2=l$
$$= k(k-1)\sum_{l=0}^{k-2} \frac{(k-2)!}{l!\,(k-2-l)!} p^{l+2} q^{k-l-2}$$
$$= k(k-1)p^2 \underbrace{\sum_{l=0}^{k-2}\binom{k-2}{l} p^l q^{k-2-l}}_{=1}$$

$$Y_n = Z_n \cdot \frac{n}{n-2}$$

e quindi, per il teorema delle funzioni continue e per il teorema sulla conv. p.c. di un vettore

$$\left(Z_n, \frac{n}{n-2}\right) \xrightarrow{p.c.} (kp, 1) \Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{p.c.} kp}$$

ii) $P(Z_n \geq (k+1)p) = 1 - P(Z_n < (k+1)p)$ 3

$= 1 - F_{Z_n}((k+1)p)$

Ne segue conv. p.c. $\Rightarrow$ conv. i.d.

$$F_{Z_n}(z) \longrightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq kp \\ 1 & z > kp \end{cases}$$

e $F_{Z_n}((k+1)p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Z((k+1)p) = 1$

Quindi $P(Z_n \geq (k+1)p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

iii) So che $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e che $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin\left(\sum_{i=1}^{n} k, p\right)$

Quindi Z_n ha distribuzione

$$\left\{\frac{j}{n}, p_j, j = 0, 1 \ldots nk\right\}$$

dove $p_j = \binom{nk}{j} p^j q^{nk-j}$