Cognome:............................... Nome:....................................

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

-

I ESONERO
A
10 novembre 2015

Esercizio 1

Lorenzo e Anna vivono all'estero ma si vogliono incontrare a Roma. Lorenzo vive a Tokyo mentre Anna vive a Londra.

Lorenzo per arrivare a Roma deve prendere 5 voli. Se non vi sono ritardi Lorenzo arriverà a Roma alle ore 17:00.

Anna invece ha un volo diretto da Londra a Roma e l'arrivo previsto alle 20:00.

Lorenzo stima che ciascuno dei suoi cinque voli sarà della durata prevista con probabilità del 90% oppure avrà un ritardo di un'ora con probabilità del 10%, e questo indipendentemente da volo a volo. Ogni aereo per partire aspetta quello della tratta precedente, quindi gli eventuali ritardi si accumulano.

i) Determinare la probabilità che Lorenzo non sia atterrato dopo Anna, se il volo di Anna è puntuale,

ii) Sapendo che Lorenzo non è atterrato dopo Anna, determinare la probabilità che Lorenzo sia arrivato a Roma alle 17:00, se l'aereo di Anna è puntuale

iii) Calcolare le probabilità dei punti i) e ii) sapendo che anche l'aereo di Anna può avere un ritardo di un'ora con probabilità 1/3.

Esercizio 2

Sia X una v.a. assolutamente continua con funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x)^{\lambda-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

con $c > 0$ e $\lambda > 0$.

i) Calcolare la costante c e la funzione di ripartizione della X.

ii) Calcolare il $\mathbb{E}(1-X)$

iii) Ponendo $\lambda = 2$, ricavare la distribuzione della v.a.

$$Y = \frac{1}{(X-1)^2}$$

SOLUZIONI

ES. 1

L = "ora arrivo di Lorenzo"

A = "ora arrivo di Anna"

N = "n° voli in ritardo"

i) $P(L \leq A) = \sum_{j=0}^{3} P(N=j) =$

$$= \sum_{j=0}^{3} \binom{5}{j} 0{,}1^{j} \cdot 0{,}9^{5-j}$$

$$= 1 - \sum_{j=4}^{5} \binom{5}{j} 0{,}1^{j}\, 0{,}9^{5-j}$$

$$= 1 - \frac{5!}{4!} 0{,}1^{4}\, 0{,}9 - \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}} 0{,}1^{5}$$

$$= 1 - 0{,}00045 - 0{,}00001 = 0{,}99954$$

ii) $$P(L=17 \mid L \le A) = \frac{P(L=17 \cap L \le A)}{P(L \le A)}$$

$$= \frac{P(L=17)}{P(L \le A)} = \frac{0{,}9^{5}}{0{,}99954} = \frac{0{,}59}{0{,}99954}$$

$$= 0{,}59$$

iii) $$P(L \le A) = P(L \le A \mid A=20)\, P(A=20) + P(L \le A \mid A=21)\, P(A=21)$$

$$= \frac{2}{3}\, 0{,}99954 + \frac{1}{3} \cdot (1 - P(N=5))$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}99954 + \frac{1}{3} (1 - 0{,}1^{5})$$

$$= 0{,}\bar{6} + 0{,}\bar{3} = 0{,}\bar{9}$$

iv) $$P(L=17 \mid L \le A) = \frac{0{,}9^{5}}{0{,}\bar{9}} = 0{,}59$$

Es. 2

i) $1 = c\int_0^1 (1-x)^{\lambda-1}\,dx$

$= -\frac{c}{\lambda}\left[(1-x)^{\lambda}\right]_0^1 = \frac{c}{\lambda} \implies c=\lambda$

ii) $\mathbb{E}(1-X) = \lambda\int_0^1 (1-x)^{\lambda}\,dx$

$= \frac{\lambda}{\lambda+1}\left[-(1-x)^{\lambda+1}\right]_0^1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

iii) $Y = \frac{1}{(X-1)^2} \in (1,+\infty)$ q.c.

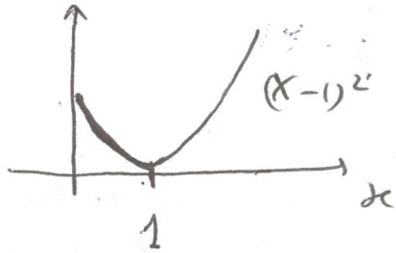
$F_X(x) = \lambda\int_0^x (1-t)^{\lambda-1}\,dt$ per $0<x\leq 1$

$= \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}(1-t)^{\lambda}\Big]_0^x = 1-(1-x)^{\lambda}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ 1-(1-x)^{\lambda} & 0<x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

Pongo $\lambda=2$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y\leq 1 \\ ? & y>1 \end{cases}$$



$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{(X-1)^2} < y\right)$$

$$= P\left((X-1)^2 > \frac{1}{y}\right)$$

perchè $X \leq 1$ p.c.

$$= P\left(X-1 < \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$= P\left(X < 1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 1 - \left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{y} \quad \text{per } y > 1$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y} & y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & y \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$