Cognome:................................. Nome:.......................................

Probabilità e Laboratorio - Prof. L.Beghin

-

Appello straordinario

10 novembre 2015

Esercizio 1

Sia (X, Y) una variabile aleatoria doppia assolutamente continua con funzione di densità

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy^2, & x, y > 0 \text{ e } x+y < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

per $k > 0$.

i) Determinare la costante di normalizzazione k.

ii) X e Y sono indipendenti?

iii) Trovare la distribuzione di probabilitè della v.a. $Z = X + Y$.

Suggerimento: si ricorda che $\int_0^1 z^{\nu-1}(1-z)^{\mu-1}dz = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu+\mu)}$

Esercizio 2

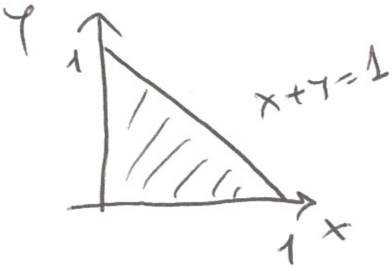
Siano $X_1, ..., X_n$ . . . variabili aleatorie indipendenti e somiglianti con media 0 e varianza 1. E sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \frac{(X_1 + ... + X_n)^2}{n}$$

i) Calcolare la media di Y_n.

ii) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}$ per $n \to \infty$.

iii) Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n nell'ipotesi particolare che le v.a. X_n abbiano distribuzione normale standardizzata.



SOLUZIONI

ES. 1

i) $1 = k\int_0^1 x \int_0^{1-x} y^2\, dy\, dx$

$= k\int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \frac{k}{3}\int_0^1 x(1-x)^3\, dx$

$= \frac{k}{3}\frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(6)} = \frac{k}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3!}\ 2!}{5!} = \frac{k}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{k}{60} \Rightarrow k = 60$

ii) X e Y non sono indipendenti.

Lo si capisce dal supporto e dal fatto che

$$f_Y(y) = 60\, y^2 \int_0^{1-y} x\, dx = \cancel{60}^{\,30}\, y^2 \left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^{1-y}$$

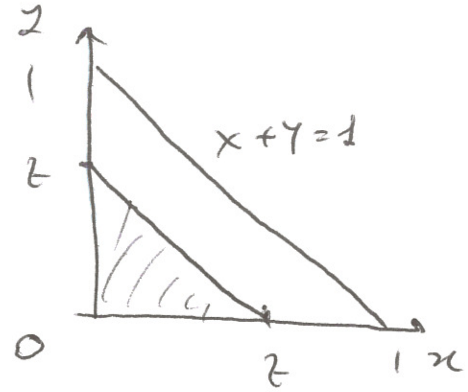
$$= 30\, y^2 (1-y)^2 \qquad \text{per } y \in (0,1)$$

mentre

$$f_X(x) = 60\, x \int_0^{1-x} y^2\, dy = \cancel{60}^{\,20}\, x \left[\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_0^{1-x}$$

$$= 20\, x (1-x)^3 \qquad \text{per } x \in (0,1)$$

Quindi $\quad f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$



iii) $\quad Z = X + Y \in (0,1)$ q.c.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ ? & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(X + Y < z)$$

$$= P(Y < z - X)$$

$$= 60 \int_0^z dx \int_0^{z-x} x\, y^2\, dy$$

$$= \cancel{60}^{\,20} \int_0^z x \left[\frac{y^3}{\cancel{3}}\right]_0^{z-x} dx$$

$$= 20 \int_0^z x\, (z-x)^3\, dx \qquad\qquad x = zt \quad dx = z\, dt$$

$$= 20 \int_0^1 z^2 t\, z^3 (1-t)^3\, dt$$

$$= 20\, z^5 \int_0^1 t\,(1-t)^3\, dt$$

$$= 20\, z^5\, \frac{\Gamma(2)\,\Gamma(4)}{\Gamma(6)} = 20\, z^5\, \frac{3!}{5!} = 6 z^5 \qquad 0<z<1$$

ES. 2

i) $$Y_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\, \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{n}{n} = 1$$

grazie all'indipendenza

ii) per il TLC $$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

e quindi per il teorema della funzione continua

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z^2 \sim \chi^2_1$$

Che $Z^2 \sim \chi^2_1$ si verifica così:

$$F_{Z^2}(w) = P(Z^2 < w) \qquad \text{per } w>0$$

$$= P(-\sqrt{w} < Z < \sqrt{w})$$

$$= \int_{-\sqrt{w}}^{\sqrt{w}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{w}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad f_{Z^2}(w) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dw} \int_0^{\sqrt{w}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{w}{2}}}{2\sqrt{\cancel{2}w}} = \frac{e^{-\frac{w}{2}} w^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \qquad w > 0$$

iii) Se $X_i \sim N(0,1)$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, n)$ poiché è combinazione lineare di normali indipendenti

e $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n \, \mathbb{E} X_i = 0$

$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n \cdot 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1)$$

$$\text{e} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \sim \chi^2_1$$