Cognome:.. Nome:..

Barrare la casella opportuna:

□ RECUPERO I ESONERO □ RECUPERO II ESONERO

□ SCRITTO COMPLETO

Prof. BEGHIN

17-2-2015

Esercizio 1

Per raggiungere Firenze ho due possibili strade alternative: la strada statale (S) e l'autostrada (A). Entrambe possono essere bloccate con probabilità rispettivamente del 20% e del 10%. Non essendo a conoscenza di questo fatto scelgo la strada da fare lanciando un dado: se esce 6 scelgo S, negli altri casi scelgo A. Se un giorno trovo la strada bloccata riprovo nei giorni successivi. Calcolare la probabilità di arrivare a Firenze

i) il primo giorno.

ii) per la prima volta il quarto giorno, supponendo di percorrere tutti i giorni la stessa strada scelta il primo giorno (cioè senza ritirare il dado).

iii) per la prima volta il quarto giorno, supponendo di rilanciare ogni giorno il dado.

Esercizio 2

Siano X e Y due variabili aleatorie con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & (x,y) \in T \\ 0, & \text{altrove} \end{cases},$$

dove T è un triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$ e c è una costante positiva. Calcolare

i) la costante c

ii) le densità marginali di X e di Y

iii) la covarianza tra X e Y. Le due variabili sono indipendenti?

Esercizio 3

Sia X_n, per $n \geq 1$, una variabile aleatoria con densità

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{n}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

i) Trovare la funzione di ripartizione di X_n .

ii) Calcolare il valore atteso di X_n.

iii) Stabilire se la successione $\{X_n\}$ converge in distribuzione per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ES. 1:

"F" = "arrivo a Firenze"

(i) $P(F) = P(F|S)P(S) + P(F|A)P(A)$

$$= \frac{80}{100}\frac{1}{6} + \frac{90}{100}\cdot\frac{5}{6} = \frac{53}{60}$$

(ii) Schema di v.a. geometriche di parametro $\frac{80}{100}$ e $\frac{90}{100}$ rispettivamente: T = "Tentativo in cui riesco"

$$P(T=4|S) = \left(\frac{20}{100}\right)^3 \frac{80}{100} = \frac{4}{625}$$

$$P(T=4|A) = \left(\frac{10}{100}\right)^3 \frac{90}{100} = \frac{9}{10\,000}$$

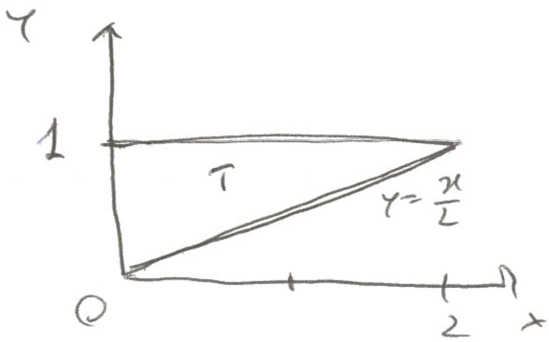
$$\Rightarrow P(T=4) = P(T=4|S)P(S) + P(T=4|A)P(A)$$

$$= \frac{4}{625}\cdot\frac{1}{6} + \frac{9}{10\,000}\cdot\frac{5}{6} \simeq 0{,}002$$

(iii) Chiamo $p = \frac{53}{60}$ la prob. calcolata al punto (i)

allora $P(T=4) = p(1-p)^3 = \frac{53}{60}\left(\frac{7}{60}\right)^3 \simeq 0{,}0014$

ES. 2:



(i) $c\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^1 dy\; x^2 y\right) dx = 1$

$$c\int_0^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^1 dx = c\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right] dx$$

$$= c\,\frac{x^3}{6}\Big]_0^2 - c\,\frac{x^5}{40}\Big]_0^2 = \frac{c\,\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}} - c\,\frac{\cancel{32}^{4}}{\cancel{40}_{5}}$$

$$= c\,\frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{15}{8}$$

(ii) $$f_X(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{1} \frac{15}{8} x^2 y \, dy \qquad \text{for } x \in (0,2)$$

$$= \frac{15}{8}\, x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big]_{\frac{x}{2}}^{1}$$

$$= \frac{15}{8}\left[\frac{1}{2} - \frac{x^4}{8}\right] = \frac{15}{16}\left[1 - \frac{x^2}{4}\right] x^2$$

$$f_Y(y) = \int_0^{2y} \frac{15}{8} x^2 y \, dx \qquad \text{for } y \in (0,1)$$

$$= \frac{15}{8}\, y\, \frac{x^3}{3}\Big]_0^{2y} = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{8}}\,\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\, y^4 = 5y^4$$

(iii) $$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

$$\mathbb{E}(X,Y) = \iint_T xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{15}{8}\int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{1} x^3 y^2 \, dx\, dy = \frac{15}{14}$$

$$\mathbb{E}X = \int_0^2 x^3 \, \frac{15}{16}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{15}{16}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - \frac{15}{64}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{4}$$

$$EY = \int_0^1 5y^5\,dy = 5\frac{y^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad Cov(X,Y) = \frac{15}{14} - \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{168}$$

Le variabili X e Y non sono indipendenti come si può vedere dal fatto che il supporto della v.a. congiunta è $0<X<2Y$ p.c.o $0<Y<\frac{X}{2}$ p.c.o

Come conseguenza la $cov(X,Y) \neq 0$.
Inoltre $f(X,Y) \neq f(X)f(Y)$

ES. 3

(i)
$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ ? & -1 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

per $-1 < x \le 0$

$$F_{X_n}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{n}\,du = \frac{1}{n}(x+1)$$

per $0 < x \le 1$

$$F_{X_n}(x) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{n}\,du + \int_0^x \left(1-\frac{1}{n}\right) du$$

$$= \frac{1}{n} + x\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{x+1}{n} & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{n} + x\left(1-\frac{1}{n}\right) & 0 < x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X \sim \text{Unif}(0,1)$

(iv) $\mathbb{E} X_n = \int_{-1}^{1} x f_n(x)\, dx$

$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{n}\, dx + \int_{0}^{1} x\left(1-\frac{1}{n}\right) dx$

$= \frac{1}{n}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$