1

Cognome:.............................. Nome:..................................
CFU:...
CORSO DI LAUREA..

Probabilità
L.Beghin - G.Salinetti

7 luglio 2014

Esercizio 1

In una presa elettrica multipla sono inserite due spine. Una spina alimenta una lampadina, l'altra spina alimenta altre due lampadine. Le tre lampadine sono ben funzionanti. Sia la presa multipla che le spine funzionano ciascuna con probabilità p, indipendentemente fra loro.

Trovare la distribuzione di probabilità del numero di lampadine accese e calcolarne il valore atteso.

Esercizio 2

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie uniformi in $(0,1)$ ed indipendenti. Siano inoltre

$$Z_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$$

e

$$Y_n = n(1 - Z_n).$$

1. Le due variabili Z_n e Y_n sono indipendenti?
2. Si ricavi il valore atteso di Z_n e Y_n.
3. Si studi la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$.

[Suggerimento: si ricorda l'integrale Beta $\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$]

SOLUZIONI

ES. 1

S_i = "spina i-esima funziona" $i=1,2$

M = "presa multipla funziona"

X = "n° lampadine accese"

$$P(X=0) = P(\bar{M} \cup (M, \bar{S}_1, \bar{S}_2))$$
$$= P(\bar{M}) + P(M, \bar{S}_1, \bar{S}_2)$$
$$= (1-p) + p(1-p)^2$$

$$P(X=1) = P(M, \bar{S_1}, S_2) = p^2(1-p)$$

$$P(X=2) = P(M, S_1, \bar{S_2}) = p^2(1-p)$$

$$P(X=3) = P(M, S_1, S_2) = p^3$$

Verifica $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} P(X=i) = 1-p + p(1-p)^2 + 2p^2(1-p) + p^3$

$$= 1-p + p(1+p^2-2p) + 2p^2 - 2p^3 + p^3$$

$$= 1 \cancel{-p} \cancel{+p} \cancel{+p^3} \cancel{-2p^2} \cancel{+2p^2} \cancel{-p^3} = 1$$

$$EX = p^2(1-p) + 2p^2(1-p) + 3p^3$$

$$= p^2 \cancel{-p^3} + 2p^2 \cancel{-2p^3} \cancel{+3p^3} = 3p^2$$

Es. 2

1) Z_n e Y_n non sono indip. perché Y_n è definita come funzione di Z_n.

2) $Z_n \in (0,1)$ q.c.

$$F_{Z_n}(z) = P(\max(X_1 \dots X_n) < z)$$

$$= \left(P(X_i < z)\right)^n = z^n \qquad 0 < z < 1$$

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} n z^{n-1} & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$EZ_n = n \int_0^1 z^n \, dz = n \left. \frac{z^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$P(Y_n < y) = P(n(1-Z_n) < y)$ $\qquad$ $Y_n \in (0,n)$ q.c.

$$= P\left(Z_n > 1 - \frac{y}{n}\right) = 1 - F_{Z_n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \qquad 0 < y \leq n$$

$$\Rightarrow F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n & 0 < y \leq n \\ 1 & y > n \end{cases}$$

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{n-1} & 0 < y \leq n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$E Y_n = \int_0^n y \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{n-1} dy \qquad \frac{y}{n} = z, \quad dy = n\, dz$$

$$= \int_0^1 n^2 z (1-z)\, dz$$

$$= n^2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = n^2 \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \cancel{\frac{n!\cdot n}{(n+1)!}} = \frac{n}{n+1} = E Z_n$$

Infatti

$$E Y_n = n - n\, E Z_n = \frac{n(n+1) - n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} = E Z_n$$

3) $$F_{Y_n}(y) \xrightarrow{n \to +\infty} \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

Quindi $\quad Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1)$