Cognome:... Nome:..

Corso di Laurea..

Probabilità
Prof. L.Beghin - G.Salinetti

10-9-2013

Esercizio n.1

Da un urna contenente n_1 palline bianche e n_2 palline nere si estraggono con ripetizione due palline. Se sono dello stesso colore si continua ad estrarre una pallina dopo l'altra (sempre con ripetizione) fino ad avere due palline di colore diverso (altrimenti ci si ferma subito).

i) Qual'è la probabilità che si arrivi a cinque palline estratte?

ii) Qual'è il numero medio di palline estratte? Quanto vale se le palline dei due colori sono in egual numero nell'urna?

[Si ricorda la seguente formula: $\sum_{r=0}^{\infty} ra^r = a/(1-a)^2$, per $|a| < 1$.]

Esercizio n.2

Sia X_n una v.a. esponenziale di parametro λ_n, per ogni n fissato, e sia $Y_n = X_n^n - 1$.

i) Determinare il supporto della variabile Y_n.

ii) Calcolare la distribuzione di Y_n.

iii) Studiare la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, per $n \to \infty$, nei due casi $\lambda_n = \frac{1}{n}$ e $\lambda_n = n$.

SOLUZIONI

ES. 1 Poniamo $p = \dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ $\quad q = \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ $\qquad N =$ n° palline estratte

(i) $P(N=5) = p^4 q + p q^4$

(ii) $P(N=n) = p^{n-1} q + p q^{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots$

$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n \left[p^{n-1} q + p q^{n-1} \right]$

$l = n-2$

$n = l+2$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)\left[q p^{l+1} + p q^{l+1}\right]$$

$$= qp\left[\sum_{l=0}^{\infty} l p^{l} + \sum_{l=0}^{\infty} l q^{l}\right] + 2qp\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-q}\right)$$

$$= qp\left[\frac{p}{(1-p)^2} + \frac{q}{(1-q)^2}\right] + 2p + 2q$$

$$= \frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} + 2p + 2q = \frac{p^3 + q^3 + 2p^2 q + 2q^2 p}{qp}$$

se $p = q = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathbb{E}(N) = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{2^2}} = \dfrac{\frac{3}{2^2}}{\frac{1}{2^2}} = 3$

ES. 2

$X_n \sim Exp(\lambda_n)$

$Y_n = X_n^n - 1$

(i) $\Longrightarrow$ $Y_n \in (-1, +\infty)$ q.c.

(ii) $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ ? & y > -1 \end{cases}$

per $y > -1$

$$F_{Y_n}(y) = P\left(X_n^n - 1 < y\right) = P\left(X_n^n < y + 1\right)$$

$$= P\left(X_n < (y+1)^{\frac{1}{n}}\right) = 1 - e^{-\lambda_n (1+y)^{\frac{1}{n}}}$$

(iii) $\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ \lim_{n \to +\infty} \left[1 - e^{-\lambda_n (1+y)^{\frac{1}{n}}}\right] & y > -1 \end{cases}$

per $\lambda_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Longrightarrow Y_n \not\to$ non converge

per $\lambda_n = n$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ 1 & y > -1 \end{cases} \Longrightarrow Y_n \xrightarrow[P]{d} -1$