Cognome:.............................. Nome:.................................
CFU.......................................

Probabilità

-

Prof. L.Beghin - G.Salinetti

APPELLO STRAORDINARIO

-

3 aprile 2013

Esercizio 1

Un professore insegna in due classi (miste): la prima classe (I) ha 4 femmine e 2 maschi, mentre la seconda (II) ha 2 femmine e 4 maschi. Il professore vuole scegliere a sorte alcuni alunni ai quali affidare dei compiti. Per decidere da quale classe "estrarli" tira una moneta: se esce Testa li sceglierà, con ripetizione, tutti dalla classe I, se esce Croce li sceglierà, sempre con ripetizione, tutti dalla classe II.

Calcolare:

i) la probabilità di scegliere una femmina all'i-esima estrazione per $i = 1, 2, ...$

ii) la probabilità che sia uscita Testa al lancio della moneta, se nelle prime due estrazioni è stata scelta una femmina.

iii) la probabiltà che alla terza estrazione esca una femmina, se nelle prime due estrazioni è uscita una femmina.

Esercizio 2

Siano X_i, per $i = 1, 2...$ delle variabili aleatorie indipendenti e tutte distribuite come esponenziali di parametro $\lambda > 0$.

i) si studi la convergenza della seguente successione, per $n \to \infty$,

$$\frac{2n}{X_1^2 + ... + X_n^2}$$

ii) si calcoli la distribuzione della v.a. $Z_i = X_i^2$

iii) si studi la convergenza in distribuzione della seguente successione, per $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{b_n}}{X_1^2 + ... + X_n^2 - a_n}$$

dopo aver opportunamente scelto a_n e b_n.

SOLUZIONI

ES. 1

F_i = "esce femmina all'iesima estrazione"

(i) $P(F_i) = P(F_i \cap \Omega)$
$= P(F_i \cap T) + P(F_i \cap C)$
$= P(F_i | T)\, P(T) + P(F_i | C)\, P(C)$
$=$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$

(ii) $$P(T \mid F_1, F_2) = \frac{P(F_1, F_2 \mid T)\, P(T)}{P(F_1, F_2 \mid C)\, P(C) + P(F_1, F_2 \mid T)\, P(T)}$$

$$= \frac{P(F_1 \mid T) P(F_2 \mid T)\, \cancel{P(T)}}{P(F_1 \mid C) P(F_2 \mid C)\, \cancel{P(C)} + P(F_1 \mid T) P(F_2 \mid T)\, \cancel{P(T)}}$$

$$= \frac{\cancel{\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}}}{\cancel{\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}}+\cancel{\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}}} = \frac{4}{5}$$

(iii) $$P(F_3 \mid F_1, F_2) = \frac{P(F_1, F_2, F_3)}{P(F_1, F_2)}$$

$$= \frac{P(F_1 F_2 F_3 \mid T)\, P(T) + P(F_1 F_2 F_3 \mid C)\, P(C)}{P(F_1 F_2 \mid T)\, P(T) + P(F_1 F_2 \mid C)\, P(C)}$$

$$= \frac{P(F_i \mid T)^3\, \cancel{P(T)} + P(F_i \mid C)^3\, \cancel{P(C)}}{P(F_i \mid T)^2\, \cancel{P(T)} + P(F_i \mid C)^2\, \cancel{P(C)}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{\cancel{9}}{\cancel{27}_3}}{\frac{5}{\cancel{9}_3}} = \frac{3}{5}$$

Es. 2 $\quad X_i \sim Exp(\lambda)$

(i)

$$\frac{2n}{X_1^2+\dots+X_n^2} = \frac{2}{\frac{X_1^2+\dots+X_n^2}{n}} \xrightarrow[\text{per la LGN}]{P} \frac{2}{E(X_i^2)}$$

~~per il T.L.~~

$$E(X_i^2) = \lambda\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx =$$

$\lambda x = z$
$x = \frac{z}{\lambda} \quad dx = \frac{1}{\lambda}dz$

$$= \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}}\int_0^{+\infty} \frac{z^2}{\lambda^2} e^{-z}\,dz$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{X_1^2+\dots+X_n^2} \xrightarrow{P} \frac{\cancel{2}}{\frac{\cancel{2}}{\lambda^2}} = \lambda^2$$

(ii) Applico il Teorema per calcolare $f_Y(y)$

$$Z_i = X_i^2 = f(X_i)$$

$y = x^2 = f(x)$
$x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$
$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$Z \in (0,+\infty)$ p.c

$$f_Z(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\lambda}{2} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda y}$$

oppure, in alternativa,

$$F_Z(z) = P(Z<z) = P(X^2<z) = P(X<\sqrt{z}) \qquad z>0$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-e^{-\lambda\sqrt{z}} & z>0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{\lambda}{2\sqrt{z}} e^{-\lambda\sqrt{z}}$$

(iii)

$$\frac{\sqrt{b_n}}{X_1^2+\cdots+X_n^2-a_n} \xrightarrow{d} \frac{1}{Y} \qquad \text{dove } Y \sim N(0,1)$$

per il TLC.

se $a_n = E(X_i^2)\cdot n = \frac{2n}{\lambda^2}$

$\sqrt{b_n} = \sqrt{V(X_i^2)}\sqrt{n}$

$$V(X_i^2) = E(X_i^4) - \left(E(X_i^2)\right)^2$$

$$E(X_i^4) = \lambda\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x}\,dx \qquad \lambda x = z \quad x = \frac{z}{\lambda} \quad dx = \frac{dz}{\lambda}$$

$$= \cancel{\frac{\lambda}{\lambda}}\int_0^{+\infty} \frac{z^4}{\lambda^4} e^{-z}\,dz$$

$$= \frac{\Gamma(5)}{\lambda^4} = \frac{4!}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^4}$$

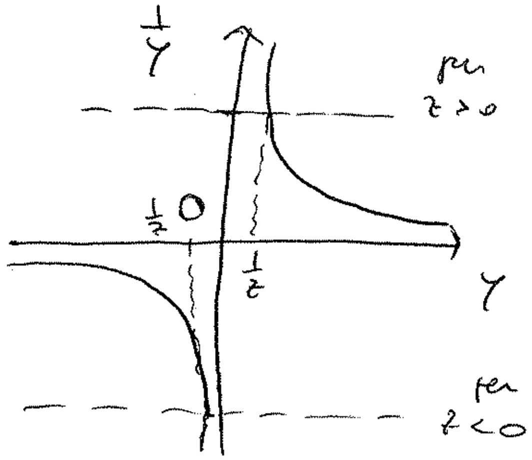
$$V(X_i^2) = \frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4} = \frac{20}{\lambda^4}$$

$$\sqrt{b_n} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{20}{\lambda^4}} = \frac{\sqrt{20n}}{\lambda^2}$$

$$\frac{\sqrt{20n}}{\lambda^2\left(X_1^2+\cdots+X_n^2-\frac{2n}{\lambda^2}\right)} \xrightarrow{d} \frac{1}{Y}$$

$Y \sim N(0,1)$

$Z = \frac{1}{Y} \in (-\infty, +\infty)$ p.c



$z>0$ $\quad P(Z<z) = P\left(Y < \frac{1}{z}\right)$

$$= \int_{\frac{1}{z}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$z<0$ $\quad P(Z<z) = P\left(\frac{1}{z} < Y < 0\right) = \int_{\frac{1}{z}}^{0} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$

$$\Rightarrow f_Z(z) = -\left(-\frac{1}{z^2}\right) e^{-\frac{1}{2z^2}} = \frac{1}{z^2} e^{-\frac{1}{2z^2}} \qquad z \in (-\infty, +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{b_n}}{X_1^2 + \dots + X_n^2 - a_n} \xrightarrow{d} Z \text{ con densità}$$