Cognome:............................... Nome:...................................
CFU...

Probabilità

-

Prof. L.Beghin - G.Salinetti

APPELLO STRAORDINARIO

-

19 aprile 2012

Esercizio 1

Ci sono due giocatori A e B che giocano a testa e croce con una moneta bilanciata. Il primo dei due che vince per sei turni (non necessariamente consecutivi) ottiene un premio.

Supponiamo che ad un certo punto il giocatore A abbia vinto già 5 volte e B solo 3 volte.

i) Si calcoli la probabilità, attuale, che B vinca il premio e la si confronti con quella iniziale.

ii) Si calcoli il numero atteso di ulteriori turni di gioco necessari perchè uno dei due vinca il premio.

Esercizio 2

Siano X e Y due v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro rispettivamente pari a $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Sia inoltre

$$Z = \frac{X}{Y}$$

i) Calcolare la densità della v.a. Z.

ii) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Z_n\}$ definita come

$$Z_n = \frac{X_n}{Y_n}$$

in cui X_n e Y_n hanno la stessa distribuzione di X e Y, per ogni $n \geq 0$, nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} a) \quad \lambda_1 &= \frac{1}{n} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{n^2} \\ b) \quad \lambda_1 &= \frac{1}{n^2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{n} \\ c) \quad \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a = "A vince il turno"
b = "B vince il turno"

Casi possibili x sono
A 5
B 3

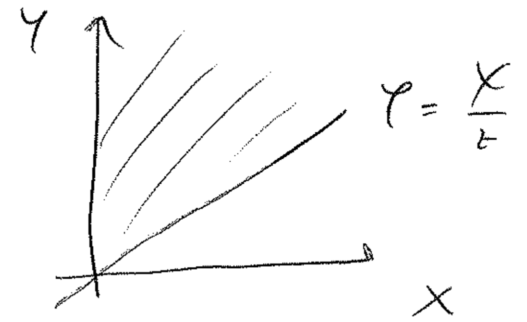
$$\left\{ \begin{array}{ll} aaa & baa \\ aab & bab \\ aba & bba \\ abb & bbb \end{array} \right.$$

i) $P(B \text{ vince}) = \frac{1}{8}$ mentre quella iniziale era $\frac{1}{2}$

ii) $\mathbb{E}(\text{n° tiri ulteriori}) = 1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{2}{8} = 1,75 = \frac{14}{8}$

ESERCIZIO 2 $\quad X \sim Exp(\lambda_1) \quad Y \sim Exp(\lambda_2)$ indip.

i) $Z = \frac{X}{Y} \geq 0$ p.c. $\qquad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ ? & t > 0 \end{cases}$



per $t > 0$

$\frac{1}{t} > 0$

$F_Z(t) = P\left(\frac{X}{Y} < t\right) = P\left(Y > \frac{X}{t}\right)$

$= \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \int_{\frac{x}{t}}^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, dy \, dx$

$= \lambda_1 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 x} \left[- e^{-\lambda_2 y} \right]_{\frac{x}{t}}^{+\infty}$

$= \lambda_1 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 \frac{x}{t}} \, dx$

$= \lambda_1 \left[- \frac{e^{-\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{t}\right)x}}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{t}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{t}} = \frac{\lambda_1 t}{\lambda_1 t + \lambda_2} \quad t > 0$

$$\boxed{\text{DENSITÀ di } Z \quad f_Z(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 t + \lambda_2)^2} \text{ per } t > 0}$$

ii) a) $F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\frac{t}{n}}{\frac{t}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{nt}{nt+1} \to 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{Z_n \xrightarrow[p]{d} Z \underset{p.c.}{=} 0}$

b) $F_{Z_n}(t) \to 0 \quad \forall t$ punti non conness

c) $F_{Z_n}(t) \to \boxed{F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{t}{t+1} & t > 0 \end{cases}}$