Cognome:.. Nome:..

Data esame orale: ☐ 23 gennaio ☐ 26 gennaio ☐ 20 febbraio

Probabilità
Prof. L.Beghin

12 gennaio 2012 (A)

Esercizio 1

Un giocatore lancia una moneta. Se esce testa lancia un dado ripetutamente finchè non esce il numero 6. Se esce croce lancia due dadi finchè non escono due 6. Se definiamo l'evento A_r ="il gioco si ferma all'r-esimo lancio del (o dei) dado(i)", si calcoli la $P(A_r)$.

Esercizio 2

Un professore ha una classe di studenti. Per la sua passata esperienza sa che il voto medio all'esame (valutato da 0 a 100 punti) è 75. Ha inoltre calcolato che la varianza del voto è 25. Cosa si può dire sulla probabilità che uno studente, scelto a caso, prenda

i) un voto maggiore di 85?

ii) un voto compreso tra 65 e 85?

Esercizio 3

Siano X_j, per $j = 1, ..., 2n$ delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione esponenziale di parametro λ. Studiare la convergenza della seguente successione

$$Z_n = \frac{X_1X_2 + ... + X_{2n-1}X_{2n}}{n}.$$

SOLUZIONI

ES. 1

T = "esce Testa" $\quad C$ = "esce croce"

$$\boxed{P(A_r)} = P(A_r|T)P(T) + P(A_r|C)P(C)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1} + \frac{1}{36}\left(\frac{35}{36}\right)^{r-1}\right]} \qquad r = 1, 2, \dots$$

poiché $P(A_r|T) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$ $\qquad P(A_r|C) = \frac{1}{36}\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{r-1}$

Es. 2

$X =$ "voto all'esame" $\quad EX = 75$

$V(X) = 25$

i) $P(X > 85) \leq \frac{EX}{85} = \frac{75}{85} = 0,88$

per la disug. di Markov

ii) $P(|X - 75| < 10) = P(|X - EX| < 10) \geq 1 - \frac{V(X)}{10^2}$

per la disug. di Chebishev

$= 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$

Es. 3

$X_j \sim Exp(\lambda) \Rightarrow EX_j = \frac{1}{\lambda} \quad V(X_j) = \frac{1}{\lambda^2} \quad E(X_j^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

$E(X_1 X_2) \underset{\downarrow}{=} EX_1 \cdot EX_2 = \frac{1}{\lambda^2}$

per l'indip.

$V(X_1 X_2) = E(X_1 X_2)^2 - (E(X_1 X_2))^2 = EX_1^2 EX_2^2 - \frac{1}{\lambda^4}$

$= \frac{4}{\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^4} = \frac{3}{\lambda^4} < \infty$

e inoltre $X_i X_j$ ind. da $X_v X_s$ per $i \neq j \neq v \neq s$

$\Rightarrow$ per la L.D.G.N. $\quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n} \xrightarrow{P} E(Y_i) = \frac{1}{\lambda^2}$

ovvero per la LFGN $\quad Z_n \xrightarrow{q.c.} \frac{1}{\lambda^2}$

Cognome:.. Nome:..

Data esame orale: ☐ 23 gennaio ☐ 26 gennaio ☐ 20 febbraio

Probabilità
Prof. L.Beghin

12 gennaio 2012 (B)

Esercizio 1

Una persona lancia un dado e se esce un numero pari lancia ripetutamente una moneta, finchè non esce testa. Se invece esce un numero dispari lancia due monete finchè non escono due teste. Si calcoli la probabilità che il gioco si fermi al j-esimo lancio di moneta/e.

Esercizio 2

La spesa media annua di una famiglia italiana (espressa in migliaia di euro) è 25. La varianza è stimata pari a 50. Cosa si può dire sulla probabilità che una famiglia, scelta a caso, in un certo anno abbia speso

i) più di 40?

ii) una cifra compresa tra 10 e 40?

Esercizio 3

Siano Y_j, per $j = 1, ..., 2n$ delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione normale di parametri μ e σ^2. Studiare la convergenza della seguente successione

$$W_n = \frac{Y_1Y_2 + ... + Y_{2n-1}Y_{2n}}{n}.$$

SOLUZIONI

Es. 1

A_j = "gioco finisce al j-esimo lancio di monete"

P = "esce pari al lancio del dado"

D = "esce dispari " " " "

$$P(A_j) = P(A_j|P)\,P(P) + P(A_j|D)\,P(D)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^r} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{r-1}\right]$$

poichè $P(A_j|P) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^r}$ $\quad P(A_j|D) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{r-1}$

ES. 2

$X =$ "spese medie annue"

$\mathbb{E}X = 25 \qquad V(X) = 50$

i) $P(X > 40) \leq \frac{\mathbb{E}X}{40} = \frac{25}{40} = 0{,}625$ per la dis. di Markov

ii) $P(|X - 25| < 15) \geq 1 - \frac{V(X)}{225} = 1 - \frac{50}{225} = \frac{175}{225} = 0{,}\overline{7}$

ES. 3

Y_i, Y_j ind. e id. $\quad E(Y_iY_j) = E(Y_i)E(Y_j) = \mu^2 \quad \forall i,j$

$$V(Y_iY_j) = E(Y_i^2Y_j^2) - (E(Y_iY_j))^2 = E(Y_i^2)E(Y_j^2) - \mu^4 \quad \forall i,j$$

$$= (\sigma^2+\mu^2)^2 - \mu^4 = \sigma^4 + 2\mu^2\sigma^2 < \infty$$

poiché $E(Y_i^2) = \sigma^2 + (EY_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$\Rightarrow$ per la LDG

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{Z_j}{n} \xrightarrow[q.c.]{P} E(Z_j) = E(Y_jY_{j+1}) = \mu^2$$