Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..CFU....................................
Data orale:......................☐ 9-6-2011......................☐ 14-7-2011

Probabilità
Prof. L.Beghin - G.Salinetti

7-6-2011

Esercizio 1

Otto passeggeri devono salire su due macchine A e B. Ogni auto può portare al massimo 4 persone. Per ogni passeggero si sceglie a caso, uno dopo l'altro, una delle due macchine, finchè una delle due è piena e parte.

1. Qual'è la probabilità che, nel momento in cui la prima si riempie e parte, restino a terra 3 passeggeri?
2. Qual'è la probabilità che sia la macchina A a riempirsi e partire, sapendo che restano a terra 3 persone?
3. Calcolare il valor medio del numero di persone che resta a terra quando la prima auto si riempie.

Esercizio 2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. con funzione di densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{2} & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione definita come

$$Y_n = nX_n + 1.$$

SOLUZIONI : ESERCIZIO 1

1) X = n° passeggeri a terra quando la prima si riempie

$$P(X=3) = \cancel{2 \cdot P(3A, 1B)} = 2 \cdot P(3A, 1B + \text{ultima } A) = 2 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \binom{4}{1} = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{4}$$

2) $P(A \text{ si riempie} \mid X=3) =$

$$= (\text{per simmetria}) = P(B \text{ si riempie} \mid X=3) = \frac{1}{2}$$

3) Per calcolare il EX devo calcolare la distribuz. di X:

$P(X=0)=0$

$P(X=1) = 2 \cdot P(3A, 3B + \text{ultima } A)$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2^7} \cdot \binom{6}{3} = \frac{1}{2^6} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2}} = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$P(X=2) = 2 \cdot P(3A, 2B + \text{ultima } A)$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2^6} \binom{5}{2} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{5}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$P(X=3) = \frac{1}{4}$

$P(X=4) = 2 \cdot P(4A) = 2 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{8}$

verifica $\sum_{j=0}^{4} P(X=j) = 1$

$\Rightarrow EX = \frac{5}{16} + \frac{10}{16} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{35}{16}$

ESERCIZIO 2

$X_n \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ p.c. $\Rightarrow n X_n \in (-1, 1)$ p.c.

$\Rightarrow n X_n + 1 = Y_n \in (0, 2)$ p.c.

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & 0 < y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

per $0 < y \leq 2$

$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = P(n X_n + 1 < y)$

$= P\left(X_n < \frac{y-1}{n}\right)$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{y-1}{n}} \left(\frac{n x}{2} + \frac{n}{2} \right) dx$$

$$= \frac{n}{4} \left. x^2 \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{y-1}{n}} + \frac{n}{2} \left[\frac{y-\cancel{1}}{n} + \cancel{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \frac{n}{4} \frac{y^2+\cancel{1}-2y}{n^2} - \cancel{\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{n^2}} + \frac{y}{2} = \frac{y^2}{4n} - \frac{y}{2n} + \frac{y}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{y^2}{4n} - \frac{y}{2n} + \frac{y}{2} & 0 < y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

verifica per $y = 0$ $\quad F_{Y_n}(0) = 0$

per $y = 2$ $\quad F_{Y_n}(2) = \cancel{\frac{4}{4n} - \frac{2}{2n}} + \frac{2}{2} = 1$ $\quad$ ok

per $n \to +\infty$ $\quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{y}{2} & 0 < y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{Unif}\,[0,2]}$$