Cognome:.. Nome:......................................
Corso di Laurea:..CFU..................................

Probabilità
Prof. L.Beghin - G.Salinetti

Appello straordinario
14-4-2011

Esercizio 1

Un'urna contiene tre palline numerate $1, 2, 3$, le prime due arancioni e la terza blu. Da quest'urna si fanno due estrazioni casuali.

Si considerino i seguenti eventi: $N =$"stesso numero", $C =$"stesso colore", $D =$"entrambe dispari", $S =$"somma pari a 5".

1. Calcolare le seguenti probabilità sotto l'ipotesi che le due estrazioni siano con ripetizione: $P(N)$, $P(C)$, $P(D)$, $P(S)$, $P(C \cup D)$, $P(N|C)$.
2. Calcolare le stesse probabilità sotto l'ipotesi che le estrazioni siano senza ripetizione (in questo caso l'ordine non conta).

   [Suggerimento: si consiglia di elencare i risultati possibili delle prove]

Esercizio 2

Siano X e Y due v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1. Trovare supporto e distribuzione della v.a.
$$Z = Y - X$$
2. Calcolare il valore atteso e la varianza di Z.
3. Studiare la convergenza della successione di v.a.
$$\frac{(Z_1 + ... + Z_n)^2}{2n}$$
   dove $Z_1, ..., Z_n$ sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, tutte con la stessa distribuzione di Z.

SOLUZIONI APP. STRAORD. 14-4-11

(1) 1A
2A
3B

1) estr. con rip. (ordine conta)

$\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

$\# \Omega = 9$

$N = \{11, 22, 33\}$ $\quad P(N) = \frac{\# N}{\# \Omega} = \frac{3}{9}$

$C = \{11, 12, 21, 22, 33\}$ $\quad P(C) = \frac{5}{9}$

$D = \{11, 13, 31, 33\}$ $\quad P(D) = \frac{4}{9}$

$S = \{23, 32\}$ $\quad P(S) = \frac{2}{9}$

$C \cup D = \{11, 12, 13, 21, 22, 31, 33\}$

$P(C \cup D) = \frac{7}{9}$

$N \cap C = \{11, 22, 33\}$

$P(N|C) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{3/9}{5/9} = \frac{3}{5}$

2) estr. senza rip. (ordine non conta)

$\Omega = \{12, 13, 23\}$ $\quad \# \Omega = 3$

$N = \emptyset$ $\quad P(N) = 0$

$C = \{12\}$ $\quad P(C) = \frac{1}{3}$

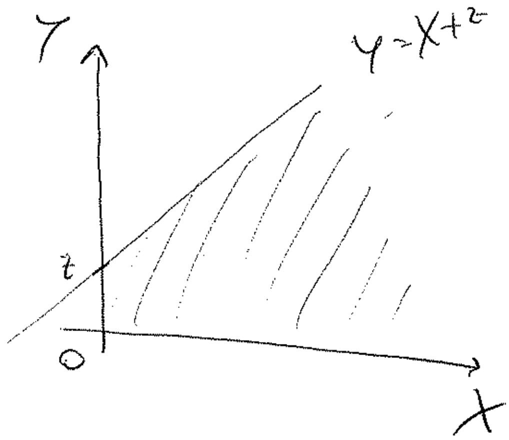
$D = \{13\}$ $\quad P(D) = \frac{1}{3}$

$S = \{23\}$ $\qquad P(S) = \frac{1}{3}$

$C \cup D = \{12, 13\}$ $\qquad P(C \cup D) = \frac{2}{3}$

$N \cap C = \emptyset$ $\qquad P(N|C) = 0$

(2) $X, Y \sim \exp(1)$ indip.



1) $Z = Y - X \in (-\infty, +\infty)$ q.c.

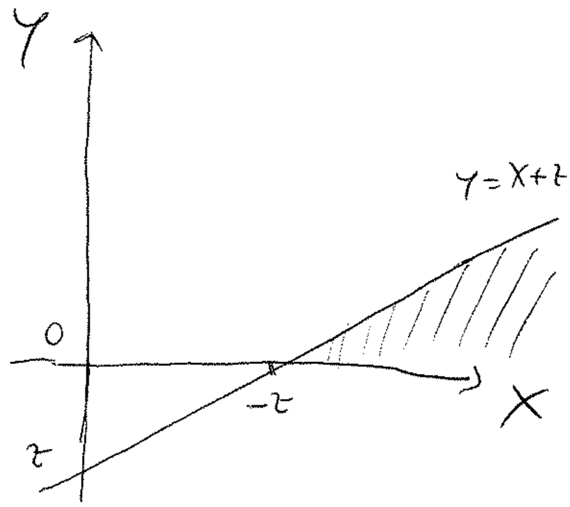
$$F_Z(z) = P(Y - X < z)$$
$$= P(Y < X + z)$$

per $z > 0$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x+z} e^{-x-y}\, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_0^{x+z} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx - \int_0^{+\infty} e^{-2x-z}\, dx$$

$$= 1 - e^{-z}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{e^{-z}}{2}$$



per $z < 0$

$$= \int_{-z}^{+\infty} dx \int_0^{x+z} e^{-x-y}\, dy$$

$$= \int_{-z}^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_0^{x+z} dx$$

$$= \int_{-z}^{+\infty} e^{-x}\, dx - e^{-z} \int_{-z}^{+\infty} e^{-2x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{-z}^{+\infty} dx - e^{-t}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-z}^{+\infty}$$

$$= e^{z} - \frac{e^{-z}}{2} e^{2t} = \frac{e^{z}}{2}$$

$$F_{\cancel{z}}(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{z}}{2} & z<0 \\ 1-\dfrac{e^{-z}}{2} & z>0 \end{cases}$$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F_z(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{z}}{2} & z<0 \\ \dfrac{e^{-z}}{2} & z>0 \end{cases}$$

2) $E(Z) = E(Y-X) = E(Y) - E(X) = 0$

$V(z) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per l'indip.}}}{=} V(Y) + V(X) = 1+1 = 2$

3) per il TLC $\qquad \dfrac{Z_1+Z_2+\cdots+Z_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} W \sim N(0,1)$

poiché $E(Z_1+\cdots+Z_n) = 0$

$\qquad V(Z_1+\cdots+Z_n) = n V(Z_i) = 2n$

Quindi, applicando il teorema della funzione continua, $\quad \left(\dfrac{Z_1+\cdots+Z_n}{\sqrt{2n}}\right)^2 \xrightarrow{d} W^2 \sim \chi^2(1)$