Cognome:.............................. Nome:...................................
CFU:...
CORSO DI LAUREA..
Data orale............☐ 17-2-2011.................☐ 24-2-2011

Probabilità

L.Beghin - G.Salinetti

15 febbraio 2011

Esercizio 1

Tre biglie uguali vengono gettate a caso in tre scatole distinte. Determinare la distribuzione di probabilità e il valore atteso delle seguenti variabili aleatorie:

i) N="numero di biglie nella prima scatola"

ii) X="numero di scatole occupate"

iii) Y="numero di scatole con una sola biglia"

iv) Z="numero di scatole con la stessa quantità di biglie"

Esercizio 2

Sia (X_1, X_2) una variabile aleatoria uniforme sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$

i) Trovare la densità della v.a. $Y = X_1 X_2$

ii) Calcolare il valore atteso della v.a.

$$Z = -\frac{1}{\ln Y}$$

Esercizio 3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda_n = n^k$, $k \in \mathbb{R}$. Sia

$$Y_n = \frac{X_n}{n^j}, \qquad j \in \mathbb{R}$$

i) Si studi la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ al variare di k e j.

ii) Si studi la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{X_n^2}{n^j}, \qquad j \in \mathbb{R}$$

al variare di k e j.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

scel.	I	II	III
	3	0	0
	2	1	0
	2	0	1
	1	1	1
	1	2	0
	1	0	2
	0	1	2
	0	2	1
	0	3	0
	0	0	3

i) $P(N=0) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$P(N=1) = \frac{3}{10}$

$P(N=2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$P(N=3) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{E}(N) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = 1$

ii) $P(X=1) = \frac{3}{10}$

$P(X=2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(X=3) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{10} + \frac{12}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$

iii) $P(\cancel{X}=0) = \frac{3}{10}$

$P(Y=1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(Y=3) = \frac{1}{10}$

$\mathbb{E}(Y) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

iv) $P(Z=0) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(Z=2) = \frac{3}{10}$

$P(Z=3) = \frac{1}{10}$

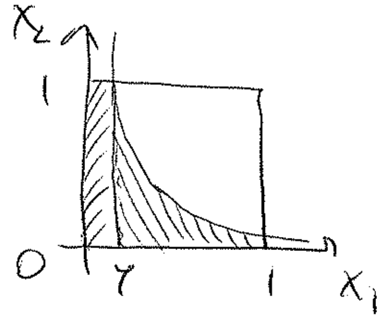
$\mathbb{E}(Z) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

ESERCIZIO 2

X_1 e X_2 sono indip. e $\mathcal{U}[0,1]$ $\Rightarrow$ $Y \in [0,1]$ p.c.

i) $P(X_1 X_2 < y) = P\left(X_2 < \frac{y}{X_1}\right)$

$= y + \int_y^1 dx_1 \int_0^{\frac{y}{x_1}} dx_2$

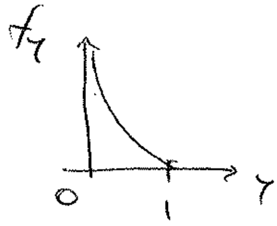


$$= y + \int_y^1 dx_1 \cdot \frac{y}{x_1} = y + y[\ln x_1]_y^1 = y - y\ln y$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y - y\ln y & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

<u>verifica</u>: $y=0$ $F_Y(0)=0$; $y=1$ $F_Y(1)=1$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \cancel{1} - \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} - \ln y = -\ln y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Verifica $-\int_0^1 \ln y \, dy = [y - y\ln y]_0^1 = 1$

ii)

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(-\frac{1}{\ln y}\right) = +\int_0^1 \frac{\cancel{\ln y}}{\cancel{\ln y}} \, dy = 1$$

<u>ESERCIZIO 3</u>

$X_n \in [0, +\infty)$ p.c. $\Rightarrow$ $Y_n \in [0, +\infty)$ p.c.

i)

$$F_{Y_n}(y) = P\left(\frac{X_n}{n^j} < y\right) = P(X_n < n^j y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-n^k n^j y} & y > 0 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-n^{k+j} y} & y \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty}$$

<u>se $k < -j$</u> $\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}$

<u>se $k = -j$</u> $\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$

<u>se $k > -j$</u> $\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$

Quindi

se $k < -j$ $Y_n \not\to$ non converge

$k = -j$ $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \text{Exp}(1)$

$k > -j$ $Y_n \xrightarrow{P} Y = 0$ p.c.

(ii) $Z_n \in [0,+\infty)$ q.c.

$$F_{Z_n}(z) = P\left(X_n^2 < n^j z\right) = P\left(X_n < n^{\frac{j}{2}}\sqrt{z}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-e^{-n^{k+\frac{j}{2}}\sqrt{z}} & z>0 \end{cases}$$

Quindi

se $k < -\frac{j}{2}$ $\quad Z_n \not\to$ non converge

$k = -\frac{j}{2}$ $\quad Z_n \xrightarrow{d} Z$ con distr. $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1-e^{-\sqrt{z}} & z>0 \end{cases}$

$k > -\frac{j}{2}$ $\quad Z_n \xrightarrow{P} Z = 0$ p.c.