Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..CFU....................................
Data esame orale:........☐ 20-1-2011...............☐ 27-1-2011...............

Probabilità
Prof. L.Beghin

18-1-2011

1) Un'urna contiene a palline arancioni e b palline bianche. Si estrae una pallina e la si rimette nell'urna insieme ad altre c palline dello stesso colore di quella estratta. Si ripete più volte tale procedura. Sia A_n l'evento "la pallina estratta all'n-esima estrazione è arancione". Calcolare le seguenti probabilità:
i) $P(A_2)$
ii) $P(A_1|A_2)$
iii) $P(A_n)$
commentando i risultati ottenuti.

---

2) Siano date le v.a.

$$U = \min\{X, Y\}$$

e

$$V = \max\{X, Y\},$$

dove X e Y sono due v.a. indipendenti ed esponenziali di parametri rispettivamente pari a λ e μ. Definiamo infine la v.a. $W = U + V$.
i) Calcolare la $P\{U = X\}$.
ii) Le variabili U e V sono indipendenti?
iii) Calcolare EU, EV e EW.
iv) Calcolare $var(U)$ e $var(V)$.

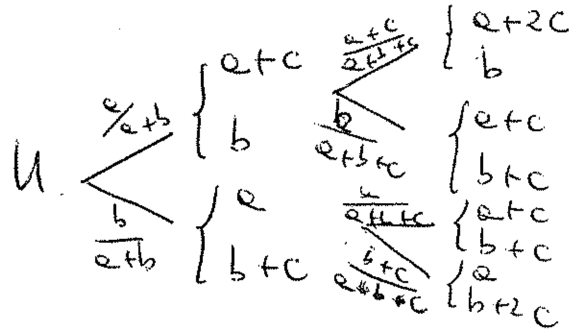
---

3) Sia X_n una v.a. con densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

per ogni n, e sia $Y_n = n(1 - X_n)$.
i) Ricavare la distribuzione di Y_n.
ii) Calcolare EX_n e EY_n.
iii) Studiare la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$.

SOLUZIONI



1) i) $P(A_2) =$

$$= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+c} = \frac{a\,(a+\cancel{b+c})}{(a+b)\,(a+\cancel{b+c})} = \frac{a}{a+b}$$

ii) $$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|A_1)\,P(A_1)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{\cancel{a+b}}}{\frac{a}{\cancel{a+b}}} = \frac{a+c}{a+b+c}$$

i) è pari alla proporzione di palline arancioni iniziale

ii) Nota: $P(A_1) = P(A_2)$.

iii) $P(A_3) = P(A_2) = P(A_1)$

La prob. di estrarre pallina arancione è sempre costante e uguale alla proporzione iniziale di palline arancioni

$\Rightarrow \quad P(A_n) = \frac{a}{a+b} \quad \forall n$

Verifica per $n=3$

$$P(A_3) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{a+2c}{a+b+2c} + \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+2c} +$$

$$+ \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+2c} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c} =$$

$$= \frac{a\left[(a+c)(a+2c)+b(a+c)+b(a+c)+b(b+c)\right]}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)}$$

$$= \frac{a(a+c)\cancel{(a+b+2c)}+ab\cancel{(a+b+2c)}}{(a+b)(a+b+c)\cancel{(a+b+2c)}} = \frac{a\cancel{(a+b+c)}}{(a+b)\cancel{(a+b+c)}} = \frac{a}{a+b}$$

---

2) i) $P(U=X) = P(X \le Y)$

$$= \int_0^{+\infty} P(X \le Y, X \in dx)$$

$$= \int_0^{+\infty} P(Y \ge x, X \in dx) \overset{\text{per l'indip.}}{=} \int_0^{+\infty} P(Y \ge x) \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\mu x} \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

ii) U e V non sono indipendenti: se $\min(X,Y)=X$ e quindi $U=X \Rightarrow V=Y$ e viceversa se $U=Y \Rightarrow V=X$

iii) ~~Ett~~ Calcolo la distr. di U e V

$U, V \in (0,+\infty)$ p.c.

$$F_U(u) = P(U<u) = 1 - P(\min(X,Y) \ge u)$$

per $u>0$

$$= 1 - P(X \ge u) \cdot P(Y \ge u)$$

per indip. di X e Y $\quad = 1 - e^{-\lambda u - \mu u} \qquad u>0$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda u - \mu u} & u > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U \sim Exp(\lambda+\mu)$$

$$EU = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$V(U) = \frac{2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}$$

$$F_V(v) = P(\cancel{V}<v) = P(\max(X,Y)<v) =$$
$$= P(X<v)\cdot P(Y<v)$$
$$= (1-e^{-\lambda v})(1-e^{-\mu v})$$
$$= \begin{cases} 0 & v \le 0 \\ 1-e^{-\lambda v}-e^{-\mu v}+e^{-(\lambda+\mu)v} & v > 0 \end{cases}$$

$$f_V(v) = \lambda e^{-\lambda v} + \mu e^{-\mu v} - (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)v}$$

$$EV = \lambda\int_0^{+\infty} v e^{-\lambda v}\,dv + \mu\int_0^{+\infty} v e^{-\mu v}\,dv - (\lambda+\mu)\int_0^{+\infty} v e^{-(\lambda+\mu)v}\,dv$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$Var(V) = E(V^2) - (EV)^2$$

$$E(V^2) = \lambda\int_0^{+\infty} v^2 e^{-\lambda v}\,dv + \mu\int_0^{+\infty} v^2 e^{-\mu v}\,dv - (\lambda+\mu)\int_0^{+\infty} v^2 e^{-(\lambda+\mu)v}\,dv$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\mu^2} - \frac{2}{(\lambda+\mu)^2}$$

$$V(V) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\mu^2} - \frac{2}{(\lambda+\mu)^2} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\mu^2} - \frac{2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{2}{\lambda\mu} + \frac{4}{\lambda(\lambda+\mu)} + \frac{4}{\mu(\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - \frac{3}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{2}{\lambda\mu} + \frac{4}{\lambda(\lambda+\mu)} + \frac{4}{\mu(\lambda+\mu)}$$

$$E(W) = E(U) + E(V)$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

---

3) $Y_n \in (0,n)$ q.c. $\forall n$

$$F_{Y_n}(y) = P(n(1-X_n) < y) = P\left(1 - X_n < \frac{y}{n}\right)$$

per $y \in (0,n)$

$$= P\left(X_n > 1 - \frac{y}{n}\right)$$

$$= \int_{1-\frac{y}{n}}^{1} n x^{n-1}\, dx = x^n \Big]_{1-\frac{y}{n}}^{1}$$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n & 0 < y \le n \\ 1 & y > n \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) \longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

Quindi $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1)$

$$E(X_n) = \int_0^1 n x^{n} dx = \frac{n}{n+1}$$

$$E(Y_n) = n E(1 - X_n) = n - n E X_n$$

$$= n - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2 + n - n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$