Cognome:............................... Nome:...................................
Corso di Laurea ....CFU....................................

Probabilità - Prof. L.Beghin
II ESONERO
13-1-2011

Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria con densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e sia

$$Y = \frac{1}{X^2}.$$

i) Calcolare k e ricavare la distribuzione della v.a. Y.
ii) Le variabili sono indipendenti? Sono identicamente distribuite?
iii) Calcolare EX, EY e $E(XY)$.
iv) Calcolare la seguente probabilità

$$P\left(Y > \frac{1}{3} \middle| X > 1\right).$$

Si ricorda che $\Gamma(0) = \infty$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Esercizio 2

Siano X_j e Y_j v.a. tra loro indipendenti per ogni j. La v.a. X_j è distribuita come un'esponenziale di parametro 1 per ogni j, mentre Y_j possiede la seguente distribuzione di probabilità, per ogni j,

$$p_k = P(Y_j = k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2, \qquad k = 2, 3...$$

Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \sqrt{n}\,\frac{X_1 + ...X_n - n}{Y_1 + ... + Y_n}$$

per $n \to \infty$.

Suggerimento: valgono le seguenti formule

$$\sum_{j=0}^{\infty} ja^j = \frac{a}{(1-a)^2}$$

e

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2a^j = \frac{a+a^2}{(1-a)^3}.$$

ES. 1

i) $$k\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = \frac{2k}{2}\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{k}{2}\left[-e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

ii) $$Y = \frac{1}{X^2} \in (0,+\infty) \text{ p.c.}$$

$$F_Y(y) = P\left(\frac{1}{X^2} < y\right) = P\left(X^2 > \frac{1}{y}\right) = P\left(X > \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$F_X(x) = 2\int_0^{x} z e^{-z^2}\,dz = \left[-e^{-z^2}\right]_0^{x} = 1 - e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ e^{-\frac{1}{y}} & y > 0 \end{cases}$$

Oppure per il Teorema

$Y = g(X) = \frac{1}{X^2}$

$h(Y) = \frac{1}{\sqrt{Y}}$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y^3}} = \cancel{2}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y^3}} = \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} \qquad y>0$$

$$h'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y^3}}$$

ii) Le v.a. non sono né indip. né i.d.

iii) $$EX = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx \qquad x^2 = t \quad x = \sqrt{t} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t}} e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$EY = E\left(\frac{1}{X^2}\right) = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} x^{-1} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \Gamma(0) = \infty$$

oppure dalla $f_Y(y)$ si ottiene lo stesso risultato

$$E(X\cdot Y) = E\left(X\cdot \frac{1}{X^2}\right) = E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{x} e^{-x^2} dx = \cancel{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\cancel{2}\sqrt{t}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

iv) $$P\left(Y > \frac{1}{3} \mid X > 1\right) = P\left(\frac{1}{X^2} > \frac{1}{3} \mid X > 1\right)$$

$$= \frac{P\left[\left(\frac{1}{X^2} > \frac{1}{3}\right) \cap (X>1)\right]}{P(X>1)}$$

$$= \frac{P\left[\left(-\sqrt{3} < X < \sqrt{3}\right) \cap (X>1)\right]}{P(X>1)} = \frac{P(1 < X < \sqrt{3})}{P(X>1)}$$

$$= \frac{F_X(\sqrt{3}) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = \frac{\cancel{1} - e^{-3} - \cancel{1} + e^{-1}}{e^{-1}} = 1 - e^{-2}$$

<u>Es. 2</u>

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \frac{\frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}}}{\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}}$$

per la LDGN $\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} E(Y)$

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

$$= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k - \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^k$$

$$= \frac{\cancel{p^2}}{(1-p)^2} \frac{1-p+(1-p)^2}{p^{\cancel{3}}} - \frac{\cancel{p^2}}{(1-p)^2} \frac{\cancel{1-p}}{\cancel{p^2}}$$

$$= \frac{1-p+1+p^2-2p-p(1-p)}{p(1-p)^2} = \frac{2\cancel{(1-p)^2}}{p\cancel{(1-p)^2}} = \frac{2}{p}$$

Quindi $\frac{Y_1+\dots+Y_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{2}{p}$

Per il TLC $\frac{X_1+\dots+X_n-n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$

poiché per X_j $E(X_j)=1$ $V(X_j)=1$

$\Rightarrow$ ~~Pertanto~~ Per l'indip. tra numeratore e denom. possono concludere che il rapporto tende i.d. a $\frac{2}{p}X \sim N(0,\frac{4}{p^2})$.