Cognome:.......................................... Nome:..........................................

Corso di Laurea:.......................................CFU.......................................

**Probabilità**
**Prof. L.Beghin**

## APPELLO STRAORDINARIO
**11 novembre 2010**

1) In una regione i fiumi hanno il seguente andamento: ad ogni Km del proprio corso un fiume può estinguersi con probabilità 1/4, continuare il suo corso con probabilità 1/2 oppure biforcarsi in due corsi d'acqua con probabilità 1/4.

Supponiamo che ciò che avviene ad ogni corso d'acqua sia indipendente da quello che succede agli altri e supponiamo che alla sorgente ci sia un solo fiume. Calcolare la probabilità che:

*i*) a 2 Km di distanza dalla sorgente ci sia ancora almeno un corso d'acqua.

*ii*) dopo 1 Km ci siano 2 corsi d'acqua, sapendo che dopo 2 Km non ce n'è più nessuno.

---

2) Consideriamo le v.a. $X_1, ..., X_n$ indipendenti tra loro e identicamente distribuite con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases} .$$

Si definisca la successione di v.a.

$$Y_n = [\min(X_1, ..., X_n)]^n .$$

*i*) Calcolare la distribuzione della v.a. $Y_n$.

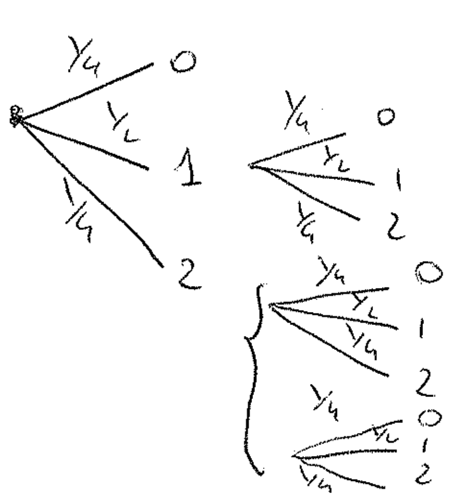
*ii*) Studiare il limite della successione $\{Y_n\}$.

SOLUZIONI :

1) i) $X_j =$ "n° di corsi d'acqua dopo j- Km." $j = 1, 2, ..$

$P(X_2 > 0) = 1 - P(X_2 = 0)$

$= \cancel{1-(}$



$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$

(ii) $$P(X_1 = 2 \mid X_2 = 0) = \frac{P(X_2 = 0 \mid X_1 = 2)\, P(X_1 = 2)}{P(X_2 = 0)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{25}{64}} = \frac{1}{25}$$

2) $X_1, \dots X_n$ indip. tra loro e i.d.

$X_i \geq 0$ q.c. $\Rightarrow Y_n = (\min(X_1 \dots X_n))^n \geq 0$ q.c. $\forall n$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) = P\{(\min(X_1, \dots X_n))^n < y\}$$

$$= P\{\min(X_1 \dots X_n) < y^{1/n}\}$$

$$= 1 - P\{\min(X_1, \dots X_n) \geq y^{1/n}\}$$

per l'indip. e la i.d. $$= 1 - [P(X_j \geq y^{1/n})]^n = 1 - \left[\int_{y^{1/n}}^{\infty} 2x e^{-x^2}\, dx\right]^n$$

Quindi $\gamma^n = X_i$

$$= 1 - \left\{\left[-e^{-x^2}\right]_{y^{1/n}}^{\infty}\right\}^n = 1 - e^{-y^{\frac{2}{n}}\cdot n}$$

Quindi $$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y > 0 \end{cases} \quad \forall n$$ $$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2ye^{-x^2} & y > 0 \end{cases}$$