Cognome:... Nome:..

Corso di Laurea:...

Probabilità
Prof. L.Beghin

I ESONERO - (B)
11 novembre 2010

1) In una regione i fiumi hanno il seguente andamento: ad ogni Km del proprio corso un fiume può estinguersi con probabilità 1/4, continuare il suo corso con probabilità 1/2 oppure biforcarsi in due corsi d'acqua con probabilità 1/4.

Supponiamo che ciò che avviene ad ogni corso d'acqua sia indipendente da quello che succede agli altri e supponiamo che alla sorgente ci sia un solo fiume. Calcolare la probabilità che:

i) a 2 Km di distanza dalla sorgente ci sia ancora almeno un corso d'acqua.

ii) dopo 1 Km ci siano 2 corsi d'acqua, sapendo che dopo 2 Km non ce n'è più nessuno.

---

2) Sia X una v.a. esponenziale di parametro $k > 1$ e sia

$$Y = \begin{cases} kX & \text{per } X < \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k} + X & \text{per } X \geq \frac{1}{k} \end{cases}.$$

i) Ricavare la funzione di ripartizione della v.a. Y.

ii) Che tipo di v.a. è? E' possibile calcolare la sua funzione di densità?

SOLUZIONI

1) vedi APPELLO STRAORDINARIO

2) $X \sim Exp(k)$ $\quad k>1$ $\qquad X \geq 0$ p.c.

$\Rightarrow Y \geq 0$ p.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ ? & y \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y<y \cap \Omega) = P(Y<y, (X<\tfrac{1}{k}) \cup (X \geq \tfrac{1}{k}))$$

$$= P(Y<y, X<\tfrac{1}{k}) + P(Y<y, X \geq \tfrac{1}{k})$$

$$= P\left(kX < y,\ X < \tfrac{1}{k}\right) + P\left(1 - \tfrac{1}{k} + X < y,\ X \geq \tfrac{1}{k}\right)$$

$$= P\left(X < \tfrac{y}{k},\ X < \tfrac{1}{k}\right) + P\left(X < y - 1 + \tfrac{1}{k},\ X \geq \tfrac{1}{k}\right)$$

per $y < 1$ $\quad \left(X < \frac{y}{k}\right) \subset \left(X < \frac{1}{k}\right)$ e $y - 1 < 0$ quindi $= \phi$

poiché non può essere $X < y - 1 + \frac{1}{k}$ e $X \geq \frac{1}{k}$ ($y-1 < 0$)

quindi ho

$$P\left(X < \tfrac{y}{k}\right) + \cancel{P\left(\tfrac{1}{k} \leq X\right)}\ 0 = 1 - e^{-k\frac{y}{k}} = 1 - e^{-y}$$

per $y \geq 1$ $\quad \left(X < \frac{1}{k}\right) \subset \left(X < \frac{y}{k}\right)$ e $y - 1 > 0$

quindi

quindi ho

$$P\left(X < \tfrac{1}{k}\right) + P\left(\tfrac{1}{k} < X < \tfrac{1}{k} + y - 1\right)$$

$$= 1 - e^{-\frac{k}{k}} + k\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}+y-1} e^{-kx}\, dx = 1 - e^{-1} + \left[-e^{-kx}\right]_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}+y-1}$$

$$= 1 - \cancel{e^{-1}} - e^{-1-ky+k} + \cancel{e^{-1}}$$

$$= 1 - e^{-1-k(y-1)}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & 0 < y \leq 1 \\ 1 - e^{-1-k(y-1)} & y > 1 \end{cases}$$

Verifiche: è continua g.o. e per $y \to \infty$ $F_Y \to 1$

Quindi Y è una v.a. ass. continua e

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ e^{-y} & 0 < y \leq 1 \\ k e^{-1-k(y-1)} & y > 1 \end{cases}$$