Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea:..

Numero di CFU:..Data esame orale......................

Probabilità
Prof. L.Beghin

16-9-2010

1) Estraggo (in blocco) due monete da un sacchetto che ne contiene tre, di cui due sono perfette ed una no (la probabilità che lanciandola venga testa è 2/3).

a) Qual'è la probabilità che tra quelle estratte non vi sia quella truccata?

b) Lancio le due monete estratte e ottengo due teste. Calcolare la probabilità dell'evento espresso nel precedente punto a).

---

2) Sia X una variabile aleatoria distribuita con legge esponenziale di parametro μ. E sia, per ogni n naturale,

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{per } X \leq 1/n \\ \mu X, & \text{per } X > 1/n \end{cases}$$

a) Trovate la funzione di ripartizione della v.a. Y_n.

b) Studiate la convergenza della successione di v.a. $Y_n, n \geq 1$.

SOLUZIONI

$\begin{pmatrix} A & A \\ B & \end{pmatrix}$

1) Monete di tipo A è equilibrata
Monete di tipo B hanno prob. $\frac{2}{3}$ di dare teste (T)

a) $P(AA) = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}$

b) $P(AA|2T) = \dfrac{P(2T|AA)\;P(AA)}{P(2T|AA)\;P(AA) + P(2T|AB)\;P(AB)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{2}{9}} = \frac{1}{\frac{9+24}{9}} = \frac{3}{11}$$

Sapendo che sono uscite due teste la prob. che non vi sia ...

estrarre le monete non bilanciate è diminuire.
Infatti la moneta B favorisce l'uscita di T.

2) $X \sim Exp(\mu)$ $\qquad X \in (0, +\infty)$ q.c.

$$Y_n = \begin{cases} 0 & X \leq 1/n \\ \mu X & X > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow \qquad Y_n \in \{0\} \cup \left(\frac{\mu}{n}, \infty\right)$ q.c. $\quad \forall n$

per $y > 0$

e) $$P(Y_n < y) = P\left[\left(Y_n < y, X \leq \frac{1}{n}\right) \cup \left(Y_n < y, X > \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= P\left[0 < y, X \leq \frac{1}{n}\right] + P\left[\mu X < y, X > \frac{1}{n}\right]$$

$$= P\left[X \leq \frac{1}{n}\right] + P\left[X < \frac{y}{\mu}, X > \frac{1}{n}\right]$$

$$\left(\frac{1}{n} < X < \frac{y}{n}\right)$$

per $\underline{0 < y < \frac{\mu}{n}}$

$$P(Y_n < y) = P\left(X \leq \frac{1}{n}\right) = 1 - e^{-\frac{\mu}{n}}$$

invece per $y \geq \frac{\mu}{n}$

$$P(Y_n < y) = P\left(X \leq \frac{1}{n}\right) + P\left(\frac{1}{n} < X < \frac{y}{n}\right)$$

$$= 1 - \cancel{e^{-\frac{\mu}{n}}} + \cancel{e^{-\frac{\mu}{n}}} - e^{-y}$$

$$= 1 - e^{-y}$$