Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea:...............................CFU..

Probabilità
prof. L. Beghin
13-7-2010

Esercizio n.1

Una moneta sbilanciata viene lanciata tante volte. A ciascun lancio la probabilità che esca T è pari a $p \in (0,1)$. Calcolare la probabilità degli eventi:

i) A =(la 1° T esce al 5° lancio);

ii) B =(la 3° T esce al 8° lancio);

iii) $C = A \cap B$;

iv) D =(fra l'11° e il 20° lancio (estremi inclusi) escono esattamente 6 T).

v) Calcolare la probabilità che la 1° T esca al lancio h sapendo che la 2° T esce al lancio $h+k$. Commentare il risultato.

Esercizio n.2

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

i) Si ricavi la distribuzione della v.a.

$$Y = \min(X_1, ..., X_n).$$

ii) Si calcoli il valore atteso di Y.

Esercizio n.3

Siano $X_1, ..., X_n$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con media 0 e varianza 1. E sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \frac{(X_1 + ... + X_n)^2}{n}.$$

i) Calcolare il valore atteso di Y_n.

ii) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $Y_n, n \geq 0$.

SOLUZIONI:

1) i) $P(A) = P(CCCCT) = pq^4$ (v.a. geometrica)

ii) $P(B) = \binom{7}{2} p^3 q^5$ (v.a. binomiale neg.)

iii) $P(C) = P(A \cap B) =$

$= P[(CCCCTCTT) \cup (CCCCTTCT)]$ (fissi)

$= 2p^3q^5$

iv) $P(D) = \binom{10}{6} p^6 q^4$ (v.a. binomiale)

v) $P(1^\circ T \text{ al lancio } h \mid 2^\circ T \text{ al lancio } (h+k))$

$$= \frac{P(1^\circ T \text{ lancio } h \cap 2^\circ T \text{ lancio } (h+k))}{P(2^\circ T \text{ lancio } (h+k))}$$

$$= \frac{\cancel{p \cdot q^{h-1} \cdot p \cdot q^{k-1}}}{\binom{h+k-1}{1} \cancel{p^2 q^{h+k-2}}} = \frac{1}{h+k-1}$$

la prob. non dipende da p

<u>Commento</u>: sapendo che la $2^\circ T$ esce al lancio $(h+k)$ la v.a. "n° del lancio in cui esce la $1^\circ T$" è uniformemente distribuita su $\{1, 2, \dots h+k-1\}$.

2) $Y = \min\{X_1, \dots X_n\}$

$X_j \in (0,1]$ q.c. $\forall j$

$\Rightarrow Y \in (0,1]$ q.c.

i) $F_Y(y) = P(\min(X_1 \dots X_n) < y)$

$0 < y \leq 1$

$= 1 - P(\min(X_1, \dots X_n) \geq y)$

$= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{n} (X_j \geq y)\right)$

poiché sono i.i.d

$= 1 - [P(X_j \geq y)]^n = 1 - \left[2 \int_y^1 (1-x)\, dx\right]^n$

$= \cancel{1 - [2(1-y) + 2(\dots)]}$

$$1 - \left[2(1-y) - \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} \Big|_y^1 \right]^n$$

$$= 1 - \left[2(1-y) - 1 + y^2 \right]^n = 1 - \left[1 - 2y + y^2 \right]^n$$

$$= 1 - (1-y)^{2n}$$

$$\frac{dF_Y}{dy} = 2n\,(1-y)^{2n-1} = f(y) \qquad 0 < y \le 1$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-(1-y)^{2n} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2n\,(1-y)^{2n-1} & 0 < y \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ii) $$EY = 2n \int_0^1 (1-y)^{2n-1}\, y^{2-1}\, dy$$

$$= 2n\, B(2n, 2) = 2n\, \frac{\Gamma(2n)\,\overset{=1}{\Gamma(2)}}{\Gamma(2n+2)}$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)!}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}$$

3) $X_1, \ldots X_n$ v.a iid. $EX_j = 0 \quad V(X_j) = 1 \quad \forall j$

$$Y_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n} = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n} S_n^2$$

i) $$EY_n = \frac{1}{n} E\left(S_n^2\right) = \frac{1}{n}\left[\mathrm{var}(S_n) + \left(ES_n\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(n\,\underbrace{\mathrm{var}(X_j)}_{=1} + \left(n\,\underbrace{EX_j}_{=0}\right)^2\right] = 1$$

ii) Per il TLC si ha che $$\frac{S_n - 0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

poiché il quadrato è una funzione continua

$$\Rightarrow \quad Y_n = \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2 \xrightarrow{d} Z^2 \sim \chi^2(1)$$