Cognome:................... Nome:...
Corso di Laurea...................................... CFU..................
Data orale............☐ 10-06-2010.......☐ 15-07-2010.........

Probabilità (Prof. L.Beghin)
I scritto sessione estiva 8-6-2010

Esercizio n.1

Il colore degli occhi è determinato da geni di tipo B e b: gli individui con geni bb hanno occhi azzurri, mentre quelli con geni Bb o BB hanno occhi scuri.

I due quinti della popolazione ha geni bb, un quinto ha geni Bb e i rimanenti BB (indipendentemente dal sesso). Calcolare la probabilità che:
i) da una coppia con due individui Bb nasca un figlio con occhi azzurri, ovvero il figlio prenda il gene b sia dalla madre che dal padre. (Si ricorda che un figlio prende a caso un gene dal padre e uno dalla madre).
ii) da un coppia nasca un figlio con gli occhi azzurri dato che il padre ha occhi azzurri.
iii) la madre abbia occhi azzurri, dato che il figlio li ha azzurri.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $(0,1)$. Calcolare:
i) il valor medio della v.a.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

ii) la distribuzione di probabilità di Y.
[Si ricorda che $\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz = \arcsin z$]

Esercizio n.3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. tali che

$$P\{X_n = 0\} = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad P\{X_n = n\} = \frac{n-1}{n}.$$

Si studi la convergenza di tale successione, per $n \to \infty$, nei modi conosciuti.

SOLUZIONI:

ES. 1 i) $P(bb) = \frac{2}{5}$ $P(Bb) = \frac{1}{5}$ $P(BB) = \frac{2}{5}$

$P(\text{figlio } bb \mid \text{madre } Bb, \text{ padre } Bb) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ii) $P(\text{figlio } bb \mid \text{padre } bb) = P(\text{madre } Bb) \cdot \frac{1}{2} + P(\text{madre } bb)$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ii)

$$P(\text{madre bb} \mid \text{figlio bb}) = \frac{P(\text{figlio bb} \mid \text{madre bb}) \cdot P(\text{madre bb})}{P(\text{figlio bb})}$$

$$P(\text{figlio bb}) = P\left(\text{figlio bb} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{madre}\\ \text{padre}\end{matrix} \text{ bb}\right) P\left(\begin{matrix}\text{madre}\\ \text{padre}\end{matrix} \text{ bb}\right) +$$

$$+ 2\, P\left(\text{figlio bb} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{madre bb}\\ \text{padre Bb}\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}\text{madre bb}\\ \text{padre Bb}\end{matrix}\right) +$$

$$+ P\left(\text{figlio bb} \,\middle|\, \begin{matrix}\text{madre}\\ \text{padre}\end{matrix} \text{ Bb}\right) P\left(\begin{matrix}\text{madre}\\ \text{padre}\end{matrix} \text{ Bb}\right)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{1}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad P(\text{madre bb} \mid \text{figlio bb}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

<u>ES. 2</u> $\qquad Y = \dfrac{1}{\sqrt{1-X^2}} \qquad X \in (0,1)$ p.c. $\Longrightarrow Y \in (1, +\infty)$ p.c.

i) $$EY = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ ? & 1 < y < +\infty \end{cases}$$

$y > 1$

$$P(Y<y) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-X^2}} < y\right) = P\left(\frac{1}{y} < \sqrt{1-X^2}\right)$$

$$= P\left(1-X^2 > \frac{1}{y^2}\right) = P\left(X^2 < 1 - \frac{1}{y^2}\right)$$

$$= P\left(X < \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}\right) = F_X\left(\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{y^{-3}}{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = \frac{1}{y^2\sqrt{y^2-1}} \qquad 1 < y < +\infty$$

oppure, usando il Teorema, $\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad h(y) = \ell^{-1}(x) = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = \frac{1}{y^2\sqrt{y^2-1}}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = \boxed{\frac{1}{y^2\sqrt{y^2-1}} \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(y)}$$

ES. 3

$$X_n = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} \\ n & \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{n} & 0 < x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \qquad x > 0$$

(non è una distrib. di prob.)

$$\Rightarrow \quad X_n \not\to \quad \text{non converge}$$