Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea.. CFU..

Probabilità
Prof. L.Beghin

Appello straordinario

13-4-2010

Esercizio n.1

Un'urna contiene 16 palline. Alcune di queste sono arancioni e le altre bianche. Trovare quante sono le palline arancioni, sotto ciascuna delle due ipotesi:

i) Se si estraggono a caso e in blocco due palline, la probabilità che esse siano dello stesso colore è uguale alla probabilità che siano di colori diversi.

ii) come al punto i), tranne che le due estrazioni sono con ripetizione.

Esercizio n.2 (per 5 CFU svolgere solo i punti i) e ii))

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia X_n una variabile aleatoria con la seguente funzione di densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} .$$

e si definisca la variabile aleatoria

$$Y_n = n(X_n - 1).$$

Studiare:

i) la distribuzione della v.a. Y_n.

ii) il grafico della funzione di densità della Y_n.

iii) La convergenza della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ES. 1

$16 <$ x palline arancioni / $16-x$ palline bianche

i) estrazione in blocco:

P(stesso colore) = P(stesso colore ∩ 2 pall. arancioni) +
+ P(stesso colore ∩ palline bianche)

$$= \frac{x(x-1)}{\cancel{16\cdot 15}} + \frac{(16-x)(15-x)}{\cancel{16\cdot 15}} = P(\text{colori diversi}) = \frac{x(16-x)}{\cancel{16\cdot 15}}$$

$$\Longrightarrow \quad x(x-1)+(16-x)(15-x) = x(16-x)$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - x + 16\cdot 15 - 16x - 15x + x^2 = 16x + x^2$$

$$\Longrightarrow \quad 3x^2 - 48x + 16\cdot 15 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 16x + 80 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 240}}{2}$$

$$= 8 \pm 2 = \begin{cases} 6 \\ 10 \end{cases}$$

Quindi $x = 6$ oppure $x = 10$

ii) estrazione con ripetizione:

$P(\text{stesso colore}) = P(\text{stesso colore} \cap 2\ \text{arancioni}) + P(\text{stesso colore} \cap 2\ \text{bianch}$

$$= \frac{x^2}{\cancel{16^2}} + \frac{(16-x)^2}{\cancel{16^2}} = P(\text{colori diversi}) = \frac{2\cdot x(16-x)}{\cancel{16^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 16^2 + x^2 - 32x = 32x - 2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad 4x^2 - 64x + 16^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 16x + 64 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{16 \pm \sqrt{\cancel{16^2 - 256}}}{2}$$

$$= 8$$

Quindi $x = 8$

Es. 2

$X_n \in (0,1)$ p.c. $\forall n \implies Y_n = n(X_n - 1) \in (-n, 0)$ p.c. $\forall n$

per $y \in (-n, 0)$

i) $F_{Y_n}(y) = P(n(X_n - 1) < y)$

$$= P\left(X_n - 1 < \frac{y}{n}\right) = P\left(X_n < \frac{y}{n} + 1\right)$$

$$= \int_0^{1+\frac{y}{n}} n x^{n-1}\, dx = \left[x^n\right]_0^{1+\frac{y}{n}}$$

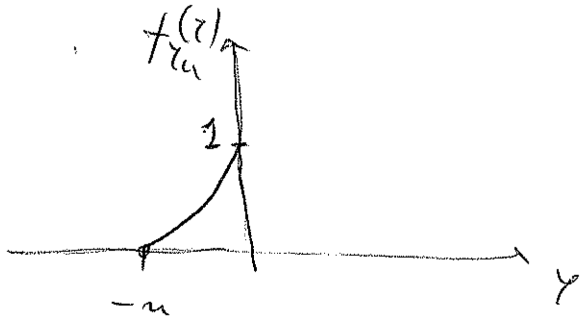
$$= \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -n \\ \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n & -n < y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

verifiche:
$y = -n \quad F_{Y_n}(y) = 0$
$y = 0 \quad F_{Y_n}(y) = 1$

ii) $f_{Y_n}(y) = \dfrac{d F_{Y_n}(y)}{dy} = \dfrac{n}{n}\left(1 + \dfrac{y}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \dfrac{y}{n}\right)^{n-1}$ per $y \in (-n, 0)$

e 0 altrove



la $\dfrac{d f_{Y_n}(y)}{dy} > 0$

e la $\dfrac{d^2 f_{Y_n}(y)}{dy} > 0$

per $n \geq 2$

iii) per $n \to +\infty$ $\quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow F_Y(y) \begin{cases} 0 & y \le -\infty \\ e^y & -\infty < y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$