Cognome:.................. Nome:...
Corso di Laurea.. CFU.................
Data orale:.........☐ 12-2-2010 ....☐ 25-2-2010

Probabilità (Prof. L.Beghin)
II Appello scritto 9-2-2010

Esercizio n.1

Marco e Luca si sfidano al seguente gioco: ci sono due scatole A e B. La scatola A contiene una moneta con probabilità di Testa pari a $p = \frac{2}{3}$. La scatola B contiene invece 10 palline numerate da 1 a 10. Si sceglie a caso una scatola.

Se esce la A i due giocatori lanciano alternativamente la moneta, iniziando da Marco, e vince il gioco chi ottiene per primo T.

Se invece esce la scatola B i due giocatori estraggono a turno e senza reimbussolamento una pallina, iniziando da Marco, e vince il gioco che ottiene per primo la pallina numero 10. Calcolare:

i) La probabilità che vinca Marco.

ii) La probabilità che sia uscita l'urna A se ha vinto Marco.

Esercizio n.2

Sia X una v.a. distribuita come un'esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Si definisce la nuova v.a.

$$Y = e^{\alpha X}$$

per $\alpha \in R$. Ricavare la distribuzione di Y nei tre casi

i) $\alpha > 0$

ii) $\alpha = 0$

iii) $\alpha < 0$

Esercizio n.3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti con funzione di densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

i) Si calcoli la convergenza in distribuzione della successione definita come

$$Y_n = nX_n.$$

ii) Si studi la convergenza della successione dei valori medi $E(Y_n)$, per $n \to \infty$.

Si ricorda che l'integrale Beta è definito come

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

M = "vince Marco" L = "vince Luca"

A = "esce scatola A" B = "esce la scatola B"

i) $Pr(M) = P(M \cap \Omega) = P(M \cap (A \cup B))$

$= P(M \cap A) + P(M \cap B)$

$= P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B)$

$= P(M|A) \cdot \frac{1}{2} + P(M|B) \cdot \frac{1}{2}$

$P(M|A) = P(T) + P(CCT) + P(CCCCT) + \ldots\ldots$

$= p + q^2 p + q^4 p + q^6 p \ldots\ldots$

$= p \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} = p \cdot \frac{1}{1-q^2} = \cancel{p} \frac{1}{\cancel{1-q}} \frac{1}{1+q} = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{4}$

$P(M|B) = \frac{1}{10} + \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} + \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} + \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} + \frac{1}{10}$

$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad P(M) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$

ii) $P(A|M) = \dfrac{P(M|A)\, P(A)}{P(M|A)\, P(A) + P(M|B)\, P(B)}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{5}{\cancel{4}}} = \frac{3}{5}$

ESERCIZIO 2

$X \sim Exp(\lambda)$

$Y = e^{\alpha X} \qquad Y \geq 0$ q.c. poiché è un espon.

ii) per $\alpha = 0$ $\quad Y = 1$ q.c.

i) per $\alpha > 0$ $\qquad Y > 1$ q.c.

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{\alpha X} < y) = P(\alpha X < \ln y)$

$$= P\left(X < \frac{\ln Y}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{\ln Y}{\alpha}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\ln Y}$$

$$= 1 - Y^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \implies F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - y^{-\frac{\lambda}{\alpha}} & y > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{\lambda}{\alpha}\, y^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1} \quad y > 1} \qquad \underline{\text{per } \alpha > 0}$$

verifica: $\frac{\lambda}{\alpha}\int_1^{+\infty} y^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy = -\left[y^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right]_1^{+\infty} = 1$

iii) per $\alpha < 0$ $\qquad Y \in [0,1]$ q.c.

$$F_Y(y) = P\left(e^{\alpha X} < y\right) = P(\alpha X < \ln y) = P\left(X > \frac{\ln Y}{\alpha}\right)$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\ln Y} = Y^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \implies F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y^{-\frac{\lambda}{\alpha}} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y) = -\frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{1}{y^{\frac{\lambda}{\alpha}+1}} \quad 0 < y < 1} \qquad Y \sim \text{Beta}\left(-\frac{\lambda}{\alpha}, 1\right)$$

verifica $-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 y^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy = \cancel{-\frac{\lambda}{\alpha}}\left[\frac{y^{-\frac{\lambda}{\alpha}}}{\cancel{-\frac{\lambda}{\alpha}}}\right]_0^1 = 1$

ESERCIZIO 3

$Y_n = n X_n \qquad X_n \in (0,1)$ p.c. $\implies Y_n \in (0,n)$ p.c.

i) $0 < y < n$

$$F_{Y_n}(y) = P(nX_n < y) = P\left(X_n < \frac{y}{n}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{y}{n}} n(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= -\cancel{n}\,\frac{(1-x)^n}{\cancel{n}}\Big]_0^{\frac{y}{n}} = 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n & 0 < y \le n \\ 1 & y > n \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1)}$$

ii) $$E(Y_n) = \int_0^1 n^2 x (1-x)^{n-1}\, dx =$$

$$= n^2 \int_0^1 x^{2-1} (1-x)^{n-1}\, dx = \quad \text{(integrale Beta)}$$

$$= n^2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = \frac{n^2 (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{n^{\cancel{2}}}{(n+1)\cancel{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$E(Y_n) = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{Infatti } E(Y) = 1 \text{ per } Y \sim Exp(1)$$