Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..
CFU...

Probabilità
prof. L. Beghin
I appello scritto - 19-1-2010
CFU 8-9-12

Esercizio 1

Tre scatole contengono ciascuna due monete; una scatola ha due monete d'argento, un'altra ne ha una d'argento e una d'oro e la terza scatola ha due monete d'oro. Si sceglie a caso una scatola e quindi da essa si estrae a caso una prima moneta e poi, senza reimmissione, si estrae anche la seconda moneta rimasta.

i) Calcolare la probabilità dell'evento "la prima moneta è d'oro"

ii) Calcolare la probabilità dell'evento "la seconda moneta è d'oro"

iii) I due eventi sono indipendenti?

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria distribuita come una geometrica di parametro p e sia

$$Z = \min\{X, c\}$$

dove c è una costante intera positiva ($c \in \mathbb{Z}$).

i) Si ricavi la distribuzione di probabilità di Z.

ii) Di che tipo di variabile aleatoria si tratta?

Esercizio 3

Siano $X_1, Y_1, ..., X_n, Y_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con media 0 e varianza σ^2. Mostrare che, per $n \to \infty$, la successione

$$W_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{Y_1^2 + ... + Y_n^2}}$$

converge ad una normale standard, utilizzando i vari teoremi sulla convergenza.

SOLUZIONI

ES. 1

A = "I° moneta è d'oro"

B = "II° " " "

S_i = "la scatola scelta è l'i-esima", $i = 1,2,3$

(i) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (S_1 \cup S_2 \cup S_3))$

$= \cancel{P(A, S_1)} + P(A, S_2) + P(A, S_3)$

$= P(A|S_2)P(S_2) + P(A|S_3)P(S_3)$

$=$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

(ii) per simmetria $P(B) = \frac{1}{2}$

(iii) per verificare l'indipendenza

$$P(A \cap B) = P(S_3) = \frac{1}{3}$$

invece

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$$

quindi A e B non sono indipendenti.

<u>ES. 2</u> $X \sim Geom(p)$

$$Z = \min\{c, X\} \qquad c \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow Z \in \{1, \dots c\}$ q.c.

(i) $P(Z=j) = P(\min\{c, X\} = j, X \geq c) + P(\min\{c, X\} = j, X < c)$

$$= P(c = j, X \geq c) + P(X = j, X < c)$$

Distinguo i due casi $\begin{cases} j = 1, \dots c-1 \\ j = c \end{cases}$

<u>per $j = 1, \dots c-1$</u>

$$P(Z=j) = P(\cancel{\emptyset}) + P(X = j, X < c) = P(X=j) = \boxed{pq^{j-1}}$$

<u>per $j = c$</u> $P(Z=j) = P(\Omega, X \geq c) + P(\cancel{\emptyset}) = P(X \geq c)$

$$= \sum_{\ell=c}^{\infty} pq^{\ell-1} = 1 - \sum_{\ell=1}^{c-1} pq^{\ell-1}$$

$(r = \ell - 1)$ $$= 1 - p\sum_{r=0}^{c-2} q^r = 1 - \cancel{p}\frac{1-q^{c-1}}{\cancel{1-q}} = \boxed{q^{c-1}}$$

~~ES. 2~~ Verifica $\sum_{j=1}^{c} P(Z=j) = \sum_{j=1}^{c-1} p\,\varrho^{j-1} + \varrho^{c-1}$

$(r=j-1)$ $= p \sum_{r=0}^{c-2} \varrho^r + \varrho^{c-1}$

$= \cancel{p}\,\frac{1-\varrho^{c-1}}{\cancel{1-\varrho}} + \varrho^{c-1} = 1$

ES. 3 Siano $X_1, Y_1, \dots X_n Y_n$ v.a. indipendenti e i.d. con media 0 e var σ^2.

$$W_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}} \xrightarrow{d} W \sim N(0,1) \quad ?$$

divido num e Den. per $\sqrt{n}$

$$W_n = \frac{(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}}{\sqrt{(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)/n}}$$

Allora il num. converge in distr. a una $N(0,\sigma^2)$ poiché

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \cdot \sigma \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2) \quad \underline{\text{per il TLC}}$$

Invece il denominat. converge in p. e p.c. a σ^2 poiché

$$\frac{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}{n} \xrightarrow[p.c.]{p} E(Y_j^2) = V(Y_j) = \sigma^2 \quad \underline{\text{per LGN}}$$

Applicando il Teor. delle fun. continue $\sqrt{\frac{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}{n}} \xrightarrow[p.c.]{p} \sigma$

Inoltre grazie all'indipend. tra X_j e Y_j si ha

$$W_n \xrightarrow{d} \frac{1}{\sigma} N(0,\sigma^2) \text{ . quindi } W_n \xrightarrow{d} N(0,1)$$