Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea...
CFU...

Probabilità (LETTERE E-N) - Prof. L.Beghin
II ESONERO 14-01-2010

Esercizio 1

In un segmento di lunghezza 1 si sceglie un punto di ascissa aleatoria X, con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}.$$

Tra i due segmenti così individuati se ne sceglie uno a caso, lanciando una moneta regolare.

i) Trovare la distribuzione della v.a.

$$Z = \text{"lunghezza del segmento scelto"}.$$

ii) **[FACOLTATIVO]** Come cambia il risultato se la X è distribuita come una Beta$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Esercizio 2

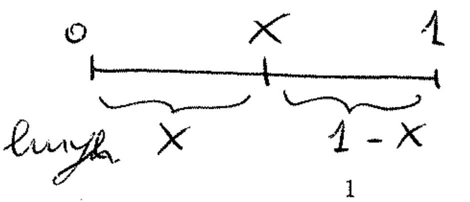
Siano Z e Y due v.a. indipendenti, entrambe distribuite come uniformi in $(0, 1)$. Definiamo, per ogni $n \geq 1$, la successione

$$X_n = \frac{\ln(Z) - \ln(Y)}{n}.$$

i) Ricavare la funzione di densità della v.a. X_n.
ii) Studiare la convergenza della successione X_n per $n \to \infty$.
iii) **[Solo per corsi da 9 o 12 cfu]** Vale anche la convergenza quasi certa?

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:



(i) $Z = \begin{cases} X & \frac{1}{2} \\ 1-X & \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Z \in (0,1)$ p.c.

per $z \in (0,1)$

$P(Z<z) = P(Z<z, Z=X) + P(Z<z, Z=1-X)$

$= P(X<z \mid Z=X)\, P(Z=X) + P(1-X<z \mid Z=1-X)\, P(Z=1-X)$

$$= \frac{1}{2} P(X<z) + \frac{1}{2} P(X>1-z)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^z \cancel{2x}\, dx + \frac{1}{\cancel{2}} \int_{1-z}^1 \cancel{2}x\, dx$$

$$= \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_{1-z}^1 = \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(1-z)^2}{2}$$

$$= \cancel{\frac{z^2}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\cancel{1} + \cancel{z^2} - 2z}{2} = z \quad \Longrightarrow \quad Z \sim Unif[0,1]$$

(ii) se $X \sim Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & 0<x<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ (*)

per $z \in (0,1)$

$$\Longrightarrow \quad F_Z(z) = P(Z<z) = \frac{1}{2} P(X<z) + \frac{1}{2} P(X>1-z)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^z x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{1-z}^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Derivando rispetto a z si ottiene la densità:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{z(1-z)}}$$

Quindi $\quad Z \sim Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(*) Si ricorda che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

<u>ESERCIZIO 2</u>

$Z, Y \in (0,1)$ q.c. $\quad \Longrightarrow \quad X_n = \frac{\ln Z - \ln Y}{n} \in (-\infty, +\infty)$ q.c.

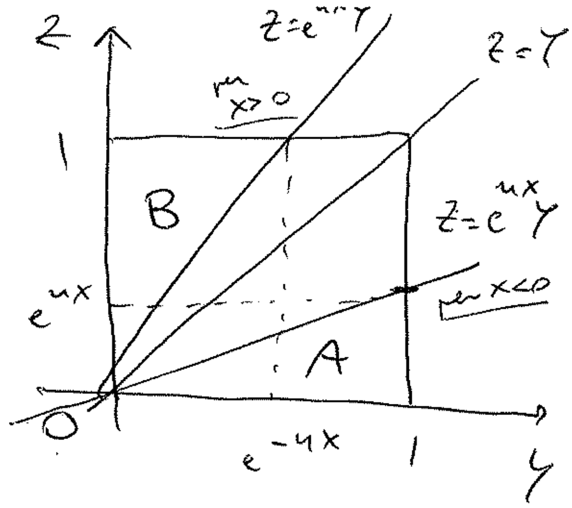
(i)

$$P(X_n<x) = P(\ln Z - \ln Y < nx)$$

$$= P(\ln Z < nx + \ln Y)$$

$$= P(Z < e^{nx} Y)$$

$$= \iint_{\{(z,y)\,:\, z < e^{nx} y\}} 1_{(0,1)}(z)\, 1_{(0,1)}(y)\, dz\, dy$$



Procedendo geometricamente si ha:

per $x<0$ $\quad F_{X_n}(x) = \text{Area}(A) =$

(poiché $e^{nx} < 1$)

$$= \frac{e^{nx}}{2}$$

per $x \geq 0$ $\quad F_{X_n}(x) = 1 - \text{Area}(B)$ (poiché $e^{nx} \geq 1$)

$$= 1 - \frac{e^{-nx}}{2}$$

Quindi
$$\boxed{F_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{nx}}{2} & x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-nx}}{2} & x > 0 \end{cases}}
\qquad
\boxed{f_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} e^{nx} & x \leq 0 \\ \dfrac{n}{2} e^{-nx} & x > 0 \end{cases}}$$

(ii) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X_n \xrightarrow[P]{d} X \overset{p.c.}{=} 0}$$

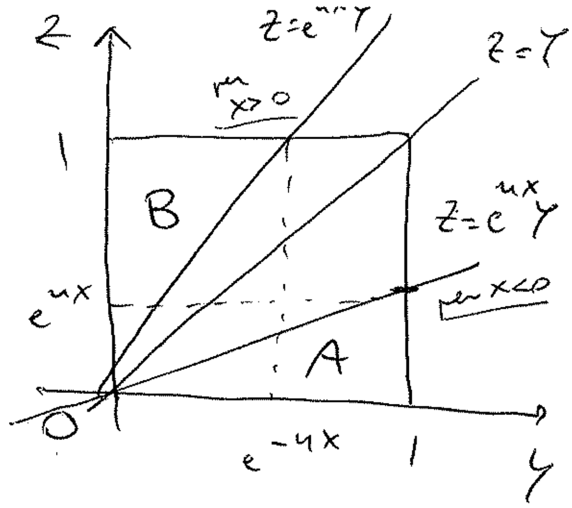
(iii) Poiché $\forall \omega \in \Omega \quad X_n(\omega) = \dfrac{\ln(Z(\omega)) - \ln(Y(\omega))}{n} \to 0$

$$P\left(\omega \in \Omega : \frac{\ln(Z(\omega)) - \ln(Y(\omega))}{n} \to 0\right\} = 1$$

Quindi $\quad X_n \xrightarrow{p.c.} X$

Altrimenti si può verificare la C.N.S. per la conv. p.c.

$$= \iint_{\{(z,y):\, z < e^{nx} y\}} \mathbb{1}_{(0,1)}(z)\, \mathbb{1}_{(0,1)}(y)\, dz\, dy$$



Procedendo geometricamente si ha:

per $x<0$ $\quad F_{X_n}(x) = \text{Area}(A) =$ (poiché $e^{nx} < 1$)

$$= \frac{e^{nx}}{2}$$

per $x>0$ $\quad F_{X_n}(x) = 1 - \text{Area}(B)$ (poiché $e^{nx} \geq 1$)

$$= 1 - \frac{e^{-nx}}{2}$$

Quindi $\boxed{F_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{nx}}{2} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-nx}}{2} & x > 0 \end{cases}}$ $\quad \boxed{f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} e^{nx} & x \leq 0 \\ \frac{n}{2} e^{-nx} & x > 0 \end{cases}}$

(ii) $\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow[P]{d} X \overset{p.c.}{=} 0}$$

(iii) Poiché $\forall \omega \in \Omega \quad X_n(\omega) = \frac{\ln(Z(\omega)) - \ln(Y(\omega))}{n} \to 0$

$$P\left(\omega \in \Omega : \frac{\ln(Z(\omega)) - \ln(Y(\omega))}{n} \to 0\right\} = 1$$

Quindi $X_n \xrightarrow{p.c.} X$

Altrimenti si può verificare la C.N.S. per la conv. p.c.