Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea:................................Numero di CFU (solo per SPRS):................................

Probabilità (SIGA - SPRS) - Prof. L.Beghin
I Prova scritta
22-1-2009

Esercizio 1
Ad una gara di tiro a segno partecipano n giocatori che indichiamo con $T_1, ..., T_n$. Ciascuno ha probabilità 1/2 di fare centro. Tirano a turno, iniziando da T_1, e così via fino a T_n. Il gioco si ferma quando uno fa centro e quel giocatore vince la gara. Arrivati a T_n, se nessuno ha colpito il bersaglio, si ricomincia da T_1, sempre nello stesso ordine.

i) Calcolare la probabilità che vinca la competizione il giocatore T_k, per $k = 1, ..., n$.

ii) Verificare che la somma delle probabilità ottenute al punto (i) sia pari ad 1.

Esercizio 2
Si consideri la v.a. (X, Y) con la seguente funzione di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{y^2+x}{y}\right\}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} .$$

i) Ricavare la densità marginale della v.a. Y.

ii) Le due variabili X e Y sono indipendenti?

iii) **SOLO esame da 8 CFU**: calcolare la distribuzione condizionata di X dato Y e il $E(X|Y = y)$.

Esercizio 3 (SOLO esame da 8 CFU)
Sia data la successione di v.a. $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, così definita:

$$Z_n = \frac{nX}{nX + Y},$$

dove le v.a. X e Y sono indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione uniforme in $(0, 1)$.

i) Si studi la convergenza in distribuzione della successione $\{Z_n\}_{n\geq 1}$.

ii) Vale anche la convergenza in probabilità?

$\boxed{\text{SOLUZIONI}}$

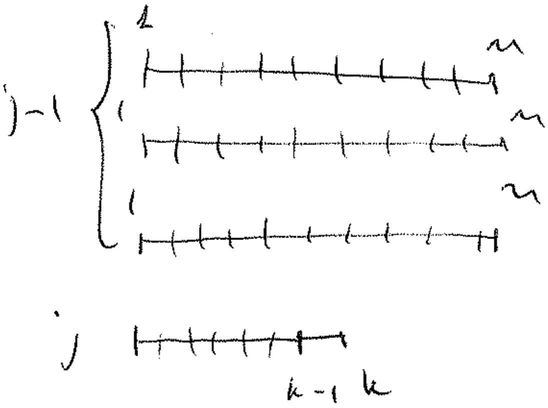
ESERCIZIO 1

(i) V_k = "vince il giocatore T_k" $\quad k = 1, \dots n$

A_j = "vince al turno j-esimo" $\quad j = 1, \dots$

$$\boxed{P(V_k)} = P\left(V_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} P(V_k \cap A_j)$$



$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(j-1)+k\cancel{-1}}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{k-n}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{nj} = \frac{1}{2^{k-n}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{k-n}} \cdot \frac{1-1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^k(2^n-1)} = \boxed{\frac{2^{n-k}}{2^n-1}} \qquad k=1,\dots n$$

(ii) $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(V_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}}{2^n-1} = \frac{2^n}{2^n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{2^n}{2^n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) = \frac{2^n\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} - 1\right)}{2^n-1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{2^n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{2^n-1}{2^n-1} \boxed{= 1}$$

ESERCIZIO 2

(i) $$\boxed{f_Y(y)} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}\, dx = y e^{-y}\left[-e^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty} = \boxed{y e^{-y}}$$

per $y>0$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y \sim \text{Gamma}(2,1)}$ $\nu = 2,\ \lambda = 1$

(ii) Y e X non sono indipendenti poiché $f_{X,Y}(x,y) \neq f_Y(y) \cdot f_X(x)$ infatti

(iii) $\boxed{f_{X|Y}(x|Y=y)} = \dfrac{e^{-y-\frac{x}{y}}}{y e^{-y}} = \boxed{\dfrac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} \quad x>0}$ ③

$\Rightarrow X|Y \sim Exp\left(\frac{1}{y}\right) \quad y>0$ che non può coincidere con la $f_X(x)$

$\boxed{E(X|Y=y)=y}$ infatti è $\frac{1}{\lambda}$ con $\lambda=\frac{1}{y}$

oppure $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx =$ $\quad x = yz$, $\frac{x}{y}=t \quad dx = y\,dt$

$= y \displaystyle\int_0^{+\infty} z e^{-t} dz = y\,\Gamma(2) = y$

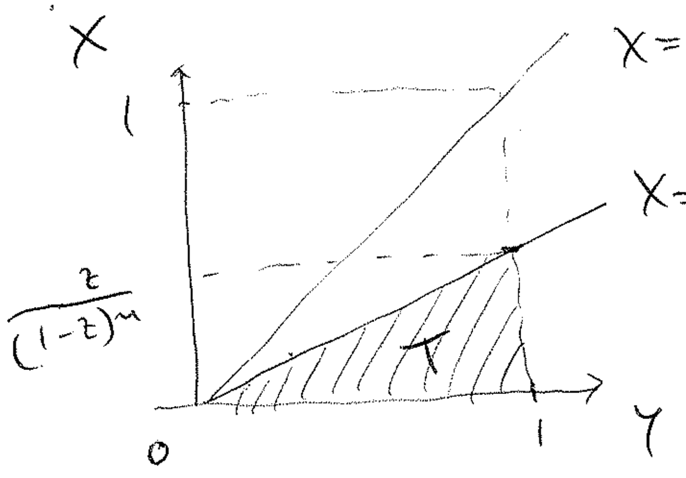
ESERCIZIO 3

(i) $Z_n \in (0,1) \quad \forall n$

$0<z<1$

$F_{Z_n}(z) = P(Z_n<z) = P\left(\dfrac{nX}{nX+Y}<z\right)$

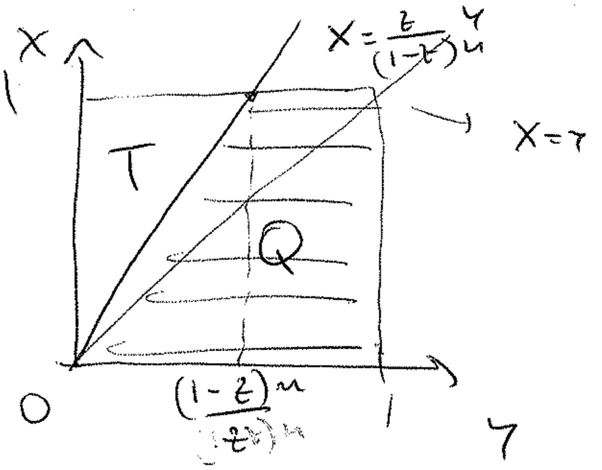
$= P\left(nX(1-z)<zY\right) = P\left(X<\dfrac{z}{(1-z)n}Y\right)$



per $\dfrac{z}{(1-z)n}<1$ la retta è al di sotto della bisettrice

$\Rightarrow$ per $0<z\leq\dfrac{n}{n+1}$ $\quad F_{Z_n}(z) = Area(T) = \dfrac{1}{2}\dfrac{z}{(1-z)n}$

Mentre per $\dfrac{n}{n+1}<z\leq 1$ devo rifare il grafico



$$F_{Z_n}(z) = \text{Area}(Q) = 1 - \frac{1}{2}\,\text{Area}(T) = 1 - \frac{1}{2}\frac{(1-z)n}{z}$$

Quindi

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)n} & 0 < z \le \frac{n}{n+1} \\ 1 - \frac{1}{2}\frac{(1-z)n}{z} & \frac{n}{n+1} < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

Verifica

$z = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)n} = \frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{2}\frac{(1-z)n}{z} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)n}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{2}$$ è continua

$z = 0 \qquad F_Z(0^+) = 0$

$z = 1 \qquad F_Z(1) = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \implies \boxed{Z_n \xrightarrow{d} 1}$$

(ii) Quindi converge anche in probabilità $\boxed{Z_n \xrightarrow{P} 1}$

Oppure (in alternativa) $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{nX}{nX+Y} - 1\right| > \varepsilon\right) = P\left(\frac{Y}{nX+Y} > \varepsilon\right) = P\left(X < \frac{Y(1-\varepsilon)}{n\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon} \longrightarrow 0$$

Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea...CFU....................................

Probabilità
Prof. L.Beghin

4-6-2009

Esercizio n.1

In un negozio entrano ogni giorno N clienti con distribuzione di probabilità pari a

$$\Pr\{N=n\} = \begin{cases} 1-\frac{kp}{1-p}, & n=0 \\ kp^n, & n \geq 1 \end{cases},$$

con $k>0$ e $0<p<1$..

Se la probabilità che un cliente effettui un acquisto è pari a quella che non compri nulla (indipendentemente tra i vari clienti), si calcoli:

i) La probabilità che esattamente j clienti effettuino un acquisto.

ii) La probabilità che due o più clienti effettuino un acquisto, sapendo che almeno uno lo effettua.

Suggerimento: si ricorda la formula seguente

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{b+r-1}{r} x^r = (1-x)^{-b}.$$

Esercizio n.2

Siano date due v.a. indipendenti X e Y, entrambe esponenziali di parametro $\lambda>0$. Si studi la convergenza della seguente successione:

$$Z_n = \frac{X+Y}{X+\frac{Y}{n}},$$

per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO N. 1

X = "n° clienti che acquistano"

(i) $Pr\{X=j\} = Pr\{(X=j)\cap\Omega\}$ $\qquad j=0,1,\dots$

$$= Pr\left\{(X=j)\cap\left(\bigcup_{n=j}^{\infty}(N=n)\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} Pr\{(X=j),(N=n)\}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} Pr\{X=j \mid N=n\}\, Pr\{N=n\}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} k p^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{2^{n}} \qquad \begin{array}{l} n-j=r\\ n=j+r\end{array}$$

$$= k\left(\frac{p}{2}\right)^{j}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{j+r}{r}\left(\frac{p}{2}\right)^{r}$$

per la formula indicata (con $x=\frac{p}{2}$ e $b-1=j$)

$$= k\left(\frac{p}{2}\right)^{j}\left(1-\frac{p}{2}\right)^{-j-1} = \boxed{\frac{2k\,p^{j}}{(2-p)^{j+1}}}$$

(ii) $$Pr\{X\geq 2 \mid X\geq 1\} = \frac{Pr\{(X\geq 2)\cap(X\geq 1)\}}{Pr\{(X\geq 1\}}$$

$$= \frac{Pr\{X\geq 2\}}{Pr\{X\geq 1\}}$$

(per il punto (i))

$$= \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\cancel{2k}\,p^{j}}{(2-p)^{j+\cancel{1}}} \Bigg/ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cancel{2k}\,p^{j}}{(2-p)^{j+\cancel{1}}}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{2-\rho}\right)^{r+2}}{\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{2-\rho}\right)^{\ell+1}}$$

$j-2=r$

$j-1=\ell$

$$= \frac{\left(\frac{\rho}{2-\rho}\right)^{2}}{\frac{\rho}{2-\rho}} = \boxed{\frac{\rho}{2-\rho}}$$

ESERCIZIO N. 2

$$Z_n = \frac{X+Y}{X+\frac{Y}{n}} \in (1,+\infty) \text{ p.c.}$$

m $z \geq 1$

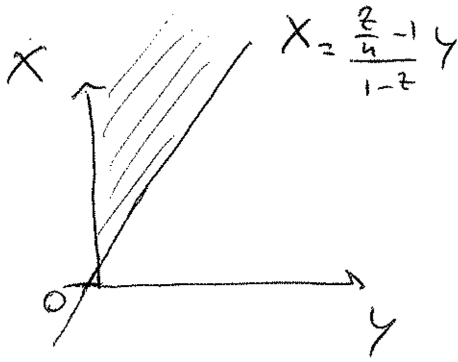
$$F_{Z_n}(z) = P_n\left\{\frac{X+Y}{X+\frac{Y}{n}} < z\right\} =$$

$$= P_n\left\{X+Y < zX + \frac{Y}{n}z\right\}$$

$$= P_n\left\{X(1-z) < Y\left(\frac{z}{n}-1\right)\right\}$$

$$= P_n\left\{X > \frac{\frac{z}{n}-1}{1-z}Y\right\}$$

poiché $1-z \leq 0$



$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{\frac{\frac{z}{n}-1}{1-z}y}^{+\infty} dx\ \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\left[-e^{-\lambda x}\right]_{\frac{\frac{z}{n}-1}{1-z}y}^{+\infty} dy$$

$$= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y - \lambda\frac{\frac{z}{n}-1}{1-z}y}\,dy = \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda} + \frac{\frac{z}{n}-1}{1-z}\cancel{\lambda}} = \frac{1-z}{\frac{z}{n}-z}$$

$$\Rightarrow \quad F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \dfrac{1-z}{\frac{z}{n} - z} & z > 1 \end{cases} \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ \dfrac{z-1}{z} & z > 1 \end{cases}$$

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \quad \text{con} \quad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} & z \geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea...CFU...............................

Probabilità
Prof. L.Beghin

15-9-2009

Esercizio n.1

Si lancia una moneta 5 volte.

i) Se si verificano solo due T, calcolare la probabilità che esse non siano consecutive.

ii) Calcolare la probabilità (assoluta) di non avere due T consecutive.

Esercizio n.2 (solo per esame da 8 CFU)

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione di Cauchy, ovvero con densità pari a

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Si consideri la seguente funzione di X:

$$W = \frac{a}{1+X^2}, \qquad a > 0.$$

Si ricavi:

i) La distribuzione della v.a. W.

ii) La distribuzione limite della successione

$$W_n = \frac{e^{1/n}}{1+X^2},$$

per $n \to \infty$.

---

casi favor. all'ev.

SOLUZIONI:

ESERCIZIO N. 1

(i) $P\left(\text{no 2 T consec.} \,\middle|\, \text{solo } 2T\right) = \dfrac{3+2+1}{\binom{5}{2}}$

n° casi possibili: n° combinazioni di cinque elementi dei quali 2 T e 3 C

TCTCC
TCCTC
TCCCT

CTCTC
CTCCT

CCTCT

$$= \frac{3+2+1}{\frac{5!}{2!\,3!}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(ii) $P(\text{no } 2T \text{ consec.}) = 1 - P(2T \text{ consec.}) - P(3T \text{ consec.})$

$- P(4T \text{ consec.}) - P(5T \text{ consec.})$

$$= 1 - \frac{11}{2^5} - \frac{5}{2^5} - \frac{2}{2^5} - \frac{1}{2^5} = 1 - \frac{19}{32} = \frac{13}{32}$$

ESERCIZIO N. 2

(i) $0 < W \leq e$ q.c.

$$F_W(w) = P\left(\frac{e}{1+X^2} < w\right) = \qquad\qquad 0 < w \leq e$$

$$= P\left(e < w + X^2 w\right)$$

$$= P\left(X > \sqrt{\frac{e \cancel{+w} - w}{w}}\right) + P\left(X < -\sqrt{\frac{e-w}{w}}\right)$$

$$= 2\, P\left(X > \sqrt{\frac{e-w}{w}}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{\frac{e-w}{w}}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\boxed{f_W(w)} = \frac{dF_W(w)}{dw} = \frac{\cancel{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(\frac{e-w}{w}\right)^{-\frac{1}{2}} (-1) \left(\frac{\cancel{-w} - e + \cancel{w}}{w^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{e-w}{w}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{e-w}} \frac{1}{w} = \boxed{\frac{1}{\pi \sqrt{w(e-w)}} \qquad 0 < w \leq e}$$

(ii) $e = e^{\frac{1}{n}}$

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{\frac{e^{\frac{1}{n}}-w}{w}}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx & 0 < w \leq e \\ 1 & w > e \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} F_W(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{\frac{1-w}{w}}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx & 0 < w \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Quindi $\boxed{W_n \xrightarrow{d} W}$ con densità

$$f_W(w) = \frac{1}{\pi} w^{-\frac{1}{2}} (1-w)^{-\frac{1}{2}}$$

perciò $\boxed{W \sim Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

Infatti $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$