Cognome:... Nome:...

Corso di Laurea:...

Numero di CFU:...........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

II esonero + recupero del I esonero
19-1-2009

1) Un giocatore ha di fronte due urne: l'urna T ha 4 palline rosse e 2 bianche, mentre l'urna C ne ha 2 rosse e 4 bianche.

Per decidere da quale urna estrarre tira una moneta e poi estrae, con ripetizione, sempre dalla stessa urna: se esce testa da T, se esce croce da C.

Si determini:

i) la probabilità di ottenere pallina rossa all'i-esima estrazione, per $i = 1, 2, ...$

ii) la probabilità che sia uscita T, se nelle prime due estrazioni è uscita una pallina rossa.

iii) FACOLTATIVO: Se nelle prime due estrazioni è uscita pallina rossa, qual'è la probabilità che esca rossa anche alla terza?

II° ESONE
COMPITO 1

---

2) Sia data la v.a. X con funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}.$$

i) Trovare con i due metodi conosciuti la distribuzione della seguente trasformazione di X:

$$Y = \ln X$$

ii) Calcolare il valor medio di Y e la sua varianza.

---

3) **SOLO per corso da 8 CFU**

Siano X_i v.a. indipendenti, tutte con la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2} & x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{2} & x \geq 0 \end{cases}.$$

Si studi la convergenza in probabilità, per $n \to \infty$, della successione

$$Z_n = \frac{2}{\frac{X_1^2}{n} + ... + \frac{X_n^2}{n}}.$$

PROBABILITÀ I-II ESONERO - BEGHIN

19-1-2008

SOLUZIONI

1) "E_i" = "i-esima pallina estratta"

R = rossa $\quad B$ = bianca

(i) $P(E_i=R) = P(E_i=R,\Omega) = P(E_i=R,T) + P(E_i=R,C)$

$= \frac{1}{2} P(E_i=R|T) + \frac{1}{2} P(E_i=R|C)$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \forall i$

(ii) $P(T|E_1=R, E_2=R) = \dfrac{P(E_1=R, E_2=R, T)}{P(E_1=R, E_2=R)}$

$= \dfrac{P(E_1=R, E_2=R|T)\cdot \cancel{P(T)}}{P(E_1=R,E_2=R|T)\cdot\cancel{P(T)} + P(E_1=R, E_2=R|C)\,\cancel{P(C)}}$

poiché sono estraz. con ripetizione $= \dfrac{P(E_1=R|T)P(E_2=R|T)}{P(E_1=R|T)P(E_2=R|T) + P(E_1=R|C)P(E_2=R|C)}$

$= \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}$

(iii) FACOLTATIVO

$P(E_3=R|E_1=E_2=R) = \dfrac{P(E_1=R, E_2=R, E_3=R)}{P(E_1=R, E_2=R)}$

(2

Numeratore $= P(E_1=R, E_2=R, E_3=R|T)\,P(T) +$

$+ P(E_1=R, E_2=R, E_3=R|C)\,P(C) =$

$$= \frac{1}{2}\left[P(E_i=R\,|T)^3 + P(E_i=R|C)^3\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right] = \frac{1}{6}$$

Denominatore $= P(E_1=R, E_2=R|T)\,P(T) + P(E_1=R, E_2=R|C)\,P(C)$

$$= \frac{1}{2}\left[P(E_i \ldots)^2 + P(E_i=R|C)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3^2}\right] = \frac{5}{18}$$

$$\Rightarrow P(E_3=R|E_1=E_2=R) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

II° ESONERO
COMPITO [illegible]

2) $X \in (1,+\infty)$ p.c. che densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

i) Applicando il teorema per le densità di funzioni continue con $Y = \ln X = \ell(X)$ e $X = h(Y) = e^{y}$ si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{e^{2y}} \cdot e^{y} = e^{-y} \quad \text{per } y \in (0,+\infty)$$

quindi $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$

oppure alternativamente, per $y>0$,

$$F_Y(y) = P(Y<y) = P(\ln X < y) = P(X < e^{y})$$

$$= F_X(e^{y}) = 1 - \frac{1}{e^{y}} = 1 - e^{-y}$$

ii) Il v.m. di Y è

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1$$

ovvero (direttamente per il fatto che $Y \sim Exp(1)$) $EY = \frac{1}{\lambda} = 1$

oppure $$E(\ell(X)) = \int_1^{+\infty} \ln x \cdot \frac{1}{x^2} dx$$ $\ln x = z$, $x = e^z$, $dx = e^z dz$

$$= \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{1}{e^{2z}} \cdot e^z dz = \int_0^{+\infty} z e^{-z} dz = 1$$

Analogamente per la $V(Y)$

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3) = 2$$

oppure $$E(\ell(X)^2) = \int_1^{+\infty} (\ln x)^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} z^2 \frac{1}{e^{2z}} e^z dz = \Gamma(3) = 2$$

$$\Rightarrow V(Y) = 2 - 1 = 1$$

3) (SOLO PER 8CFU) Si applica il teorema delle conv. per funzioni continue di successioni: infatti

$$Z_n = \frac{2}{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}} = \ell\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}\right)$$

dove ℓ è una funzione continua. Quindi per la LGN

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{P} E(X_i^2)$$

$$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 \frac{e^x}{2} dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{2} = \frac{2}{2}\Gamma(3) = 2$$

$$\boxed{Z_n \xrightarrow{P} \frac{2}{2} = 1}$$

Cognome:... Nome:...

Corso di Laurea:.......................................

Numero di CFU:...........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

II appello
11-2-2009

1) In una città ci sono tre ristoranti che indichiamo con A, B e C. Se ci sono n clienti che scelgono a caso e indipendentemente a quale recarsi, qual'è la probabilità che nessuno dei tre ristoranti resti vuoto?

---

2) Sia (X, Y) una v.a. doppia con funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ke^{-\lambda y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

i) Calcolare la costante k.
ii) Determinare le funzioni di densità marginali delle due variabili X e Y.
iii) **SOLO per corso da 8 CFU:** Determinare la densità condizionata della Y data la X.

---

3) **SOLO per corso da 8 CFU**
Siano X_i v.a. indipendenti con identica distribuzione per ogni i. Supponiamo inoltre che esse abbiano media 0 e varianza 1. Si studi la convergenza in distribuzione della successione

$$Y_n = \frac{(X_1 + ... + X_n)^2}{n}.$$

SOLUZIONI :

1) $$P(\text{nessun ristor. vuoto}) = 1 - 3P(n \text{ clienti in } A) - 3\sum_{k=1}^{n-1} P(k \text{ clienti in } A, (n-k) \text{ clienti in } B)$$

$$= 1 - 3\sum_{k=1}^{n} (k \text{ clienti in } A, (n-k) \text{ clienti in } B)$$

$$= 1 - 3\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right] = 1 - \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

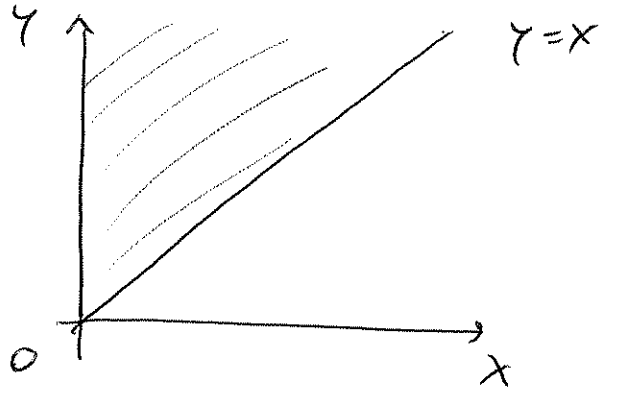
Applico il teorema binomiale: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

2

$$\Rightarrow \boxed{P(\text{nessun ristor. vuoto}) = 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 1\right] = 1 - \frac{1}{3^{n-1}}\left[2^n - 1\right]}$$

Termine per $k=0$

2) i)



Devo trovare la costante k per la quale $\iint f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\Rightarrow k\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\left(\int_0^{y} dx\right)dy = k\int_0^{+\infty} y e^{-\lambda y}\,dy$$

$\lambda y = z$

$y = \frac{z}{\lambda}$ $\quad dy = \frac{dz}{\lambda}$

$$= \frac{k}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{z}{\lambda}e^{-z}\,dz = \frac{k}{\lambda^2}\Gamma(2) = \frac{k}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow k = \lambda^2$$

<u>oppure</u> poiché $\lambda\int_0 y e^{-\lambda y}dy = E(Y)$ per $Y \sim Exp(\lambda)$

allora $\int_0^{+\infty} y e^{-\lambda y}dy = \frac{E(Y)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$

ii) $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\,\mathbb{1}_{\{0\le x\le y\}}$

$$f_X(x) = \lambda^2\int_x^{+\infty} e^{-\lambda y}dy = \lambda\left[-e^{-\lambda y}\right]_x^{+\infty} = \lambda e^{-\lambda x} \quad x>0$$

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}\int_0^{y} dx = \lambda^2 e^{-\lambda y}\,y \quad y>0$$

ovvero $= \frac{1}{\Gamma(2)}\lambda^2 y^{2-1}e^{-\lambda y} \Rightarrow$ $Y \sim Gamma(2,\lambda)$

iii) $\boxed{f_{Y|X}(y|x)} = \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}}{\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}}$ 3

$$= \boxed{\lambda e^{-\lambda(y-x)} \mathbb{1}_{\{y \ge x\}}}$$

$$\left[\text{Verifica: } \lambda \int_x^{+\infty} e^{-\lambda(y-x)} dy = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} dz = 1\right]$$

3) $Y_n = \left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2$

Studio la conv. i. d. di $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

Applico il T.L.C. poiché le v.a. X_i sono i.i.d con $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

$E(S_n) = n E(X_i) = 0$

$V(S_n) = n V(X_i) = n$

$\Rightarrow \dfrac{S_n - 0}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

Poiché il quadrato è una funzione continua

$$Y_n \xrightarrow{d} Z^2 \sim \chi^2_1$$

chi-quadro con 1 grado di lib.

La distrib. di Z^2 è una chi-quadro

Infatti $W = Z^2$ $(W \ge 0 \text{ p.c.})$

$w > 0$

$$F_W(w) = P(Z^2 < w) = P(-\sqrt{w} \le Z \le \sqrt{w})$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{w}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$\Rightarrow f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{w}} \frac{e^{-w/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{w^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{w}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$