SOLUZIONI

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..................................

Calcolo delle Probabilità
prof. L. Beghin
II prova di esonero - 23-1-2008

1) Siano X e Y due v.a. discrete, con la seguente distribuzione congiunta

$X \setminus Y$	0	1	$P(X=j)$
0	1/6	1/6	1/3
1	1/3	0	1/3
2	1/6	1/6	1/3
	2/3	1/3	1

i) Calcolare la $cov(X,Y)$. Le due variabili sono indipendenti?
ii) Trovare le distribuzioni di probabilità della X condizionata ai due valori della Y. Sono distribuzioni note?
iii) Calcolare le medie condizionate $E(X|Y=0)$ e $E(X|Y=1)$ e ricavare EX in funzione di queste ultime.

Soluzione:
i)

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1 \qquad EY=\frac{1}{3} \\ Cov(X,Y) &= EXY-EXEY \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0 \end{aligned}$$

Qundi le variabili sono incorrelate. Per l'indipendenza notiamo che

$$\begin{aligned} P(X &= 1|Y=1)=0 \\ &\neq \frac{1}{9}=P(X=1)P(Y=1) \end{aligned}$$

e ciò è sufficiente per poter affermare che X e Y non sono indipendenti.
ii) $(X|Y=0) \sim Bin(2,\frac{1}{2})$ mentre $(X|Y=1) \sim Unif\{0,2\}$ (uniforme discreta ~~sui due valori 0, 2~~).
iii)

$$E(X|Y=0)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1=E(X|Y=1).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} EX &= E(X|Y=0)P(Y=0)+E(X|Y=1)P(Y=1) \\ &= 1\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=1. \end{aligned}$$

2) Siano X_i delle v.a. con distribuzione $Unif(0,1)$ per ogni i e tra loro indipendenti. Studiare il limite in distribuzione (e, ove possibile, in probabilità) delle seguenti successioni:

i)

$$Z_n = \frac{\max(X_1, ..., X_n)}{n\left[1 - \max(X_1, ..., X_n)\right]}$$

ii)

$$Y_n = \frac{\min(X_1, ..., X_n)}{n\left[1 - \min(X_1, ..., X_n)\right]}$$

Soluzione:

i) $Z_n \in (0, +\infty)$ q.c. e la sua funzione di ripartizione è, per $z > 0$,

$$\begin{aligned} & F_{Z_n}(z) \\ = \; & P\left\{\frac{\max(X_1, ..., X_n)}{n\left[1 - \max(X_1, ..., X_n)\right]} < z\right\} \\ = \; & P\left[\max(X_1, ..., X_n) < \frac{zn}{1 + zn}\right] \\ = \; & \left[\frac{zn}{1 + nz}\right]^n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{z}}. \end{aligned}$$

Quindi $Z_n \xrightarrow{d} Z$ con distribuzione

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{z}} & z > 0 \end{cases}.$$

ii) $Y_n \in (0, +\infty)$ q.c. e la sua funzione di ripartizione è, per $y > 0$,

$$\begin{aligned} & F_{Y_n}(y) \\ = \; & P\left\{\frac{\min(X_1, ..., X_n)}{n\left[1 - \min(X_1, ..., X_n)\right]} < y\right\} \\ = \; & P\left[\min(X_1, ..., X_n) < \frac{yn}{1 + yn}\right] \\ = \; & 1 - \left[1 - \frac{yn}{1 + ny}\right]^n \\ = \; & 1 - \left[\frac{1}{1 + ny}\right]^n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Quindi $Z_n \underset{p}{\overset{d}{\to}} Y \overset{q.c.}{=} 0.$

PER IL CORSO DA 5 CFU (Cd.L. SPRS)

ES. 1 PUNTO iii) Calcolare $P(X=Y)$

Sol.: $P(X=Y) = P((X=Y) \cap \Omega) = P(((X=Y) \cap (Y=0)) \cup (Y=$

$= P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1)$

$= \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea.................................... ☐ 5 CFU ☐ 8 CFU

Probabilità (SIGA)- (SPRS)
Prof. L.Beghin
Prova scritta 15-9-2008

Esercizio 1

Un automobilista deve acquistare una macchina ed ha di fronte tre autovetture. Egli vuole acquistare la macchina più veloce e gli viene permesso di provare le tre macchine, scegliendo però, subito dopo aver provato ciascuna, se acquistarla o meno. Egli può adottare le seguenti tre strategie:

a) scegliere a sorte;

b) scegliere comunque la prima;

c) esaminare e poi scartare la prima e scegliere la seconda se è migliore della prima, altrimenti scegliere la terza.

Quale strategia gli permette di massimizzare la probabilità di scegliere la macchina migliore (motivare la risposta calcolando le rispettive probabilità)?

Esercizio 2

Data la v.a. X con distribuzione esponenziale di parametro λ definiamo, per ogni n, la v.a Y_n.tale che

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } X \geq n \\ X, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

i) ricavare, per ogni n fissato, la distribuzione di Y_n;
ii) studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. $\{Y_n; n = 1, 2, ...\}$
iii) vale anche la convergenza in probabilità? Motivare la risposta.

SOLUZIONI :

ES. 1 Macchine in ordine di velocità (decrescente):
$1°, 2°, 3°$

Eventi : a = "scegliere la migliore con la strategia a"
b = " " " " " b
c = " " " " " c

$P(a) = P(b) = \frac{1}{3}$
$P(c) = \frac{2+1}{3!} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ strategia migliore è la c.

Metodo alternativo per calcolare $P(c)$:

$$P(c) = P(c \cap \Omega)$$

$$= P(c \cap \text{esce per primo } 1°) + P(c \cap \text{esce per primo } 2°) +$$

$$+ P(c \cap \text{esce per primo } 3°)$$

$$= P(c|1°)\,P(1°) + P(c|2°)\,P(2°) + P(c|3°)\,P(3°)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Casi possibili

$$\begin{cases} 1°\ 2°\ 3° \\ 1°\ 3°\ 2° \\ 2°\ 1°\ 3° \\ 2°\ 3°\ 1° \\ 3°\ 1°\ 2° \\ 3°\ 2°\ 1° \end{cases}$$

ES. 2

i) $y > 0$ $\quad F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = 1 - P(Y_n \geq y)$

$$P(Y_n \geq y) = P(Y_n \geq y, Y_n = 0) + P(Y_n \geq y, Y_n = X)$$

$$= P(y \leq X < n) = P(X < n) - P(X < y)$$

$$= 1 - e^{-\lambda n} - 1 + e^{-\lambda y}$$

$$\overset{i)}{\Longrightarrow} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda n} & y > 0 \end{cases} \longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}$$

$$Y_n \xrightarrow{d} X \sim Exp(\lambda)$$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\quad P(|Y_n - X| > \varepsilon) = P(|X| > \varepsilon, X \geq n) + P(|Y_n - X| > \varepsilon, X < n)$

$$\leq P(X \geq n) = e^{-\lambda n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{P} X$$

Cognome:... Nome:..
Corso di Laurea:...

Numero di CFU:..........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

Prova di esonero del 20 novembre 2008 (A)

1) Un pullman deve andare da Roma a Milano, coprendo una distanza pari a K. Supponiamo che abbia un guasto ad una distanza aleatoria da Roma, che indichiamo con X.

Si calcoli la probabilità che, quando si rompe, il pullman sia più vicino a Roma che a Milano se

i) la v.a. X è uniformemente distribuita tra 0 e K.

ii) la v.a. X ha la seguente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{K^3} & 0 < x < K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

---

2) Un'azienda deve selezionare dei candidati per 2 nuovi posti di lavoro. Ci sono state in tutto 100 domande. Tra queste 40 sono di candidati diplomati, 50 sono di candidati laureati e 10 sono relative a candidati in possesso di dottorato.

i) Si calcoli la probabilità che, scegliendo a caso 2 candidati e verificando che sono in possesso di titoli diversi, quello più "qualificato" abbia un dottorato.

ii) Qual'è la probabilità di scegliere 2 candidati con lo stesso titolo?

PROBABILITÀ (SIGA - SPRS)

I° PROVA ESONERO - PROF. L. BEGHIN

20-11-2008 (A)

SOLUZIONI:

1) (i) $X \sim Unif[0,k] \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & 0 \le x \le k \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$P\left(X < \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{k}{2}} dx = \frac{1}{2}$$

(ii) $$P\left(X < \frac{k}{2}\right) = \frac{3}{k^3}\int_0^{\frac{k}{2}} x^2\, dx = \frac{\cancel{3}}{k^3}\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^{\frac{k}{2}} = \frac{k^3}{k^3}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2) D = "candidato è diplomato"

L = " " "laureato"

$\bar{D}$ = " " ha dottorato"

(i) $P\left(\begin{array}{c}\text{il più qualif.}\\ \text{ha dott.}\end{array} \middle| \begin{array}{c}\text{2 titoli}\\ \text{diversi}\end{array}\right) = P(A|B)$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P[(\bar{D}L)\cup(\bar{D}D)\cup(L\bar{D})\cup(D\bar{D})]}{P(B)}$$

$$= \frac{2\,P[(\bar{D}L)\cup(\bar{D}D)]}{P(B)} = \frac{2\cdot\left[\frac{10}{100}\cdot\frac{50}{99}+\frac{10}{100}\cdot\frac{40}{99}\right]}{P(B)} = \frac{\frac{2}{11}}{P(B}$$

$$P(B) = P\left(\begin{smallmatrix}\text{2 titoli}\\ \text{diversi}\end{smallmatrix}\right) = 1 - P\left(\begin{smallmatrix}\text{2 con}\\ \text{stesso titolo}\end{smallmatrix}\right)$$

$$= 1 - \left(P(\overline{D}\,\overline{D}) + P(DD) + P(LL) \right)$$

$$= 1 - \left[\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99} + \frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99} + \frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99} \right] =$$

$$= 1 - \frac{90 + 1560 + 2450}{9900} = 1 - \frac{41}{99} = \frac{58}{99}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{2}{11}}{\frac{58}{99}} = \frac{9}{29}$$

(ii) $P(B^c) = \frac{41}{99}$ (calcolato al punto (i))

APPELLO STRAORD. (5CFU - SPRS)

Es. 1) ii) $EX = \frac{3}{k^3}\int_0^k x^3\,dx = \frac{3}{k^3}\frac{k^4}{4} = \frac{3}{4}k$

Cognome:... Nome:...
Corso di Laurea:...

Numero di CFU:...........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

Prova di esonero del 20 novembre 2008 (B)

1) Una persona partecipa ad un quiz. Esso consiste di due domande che deve scegliere a caso da un insieme di 60. Le domande sono divise in tre gruppi a seconda della vincita in caso di risposta corretta: indichiamo con A le domande da 100 euro, con B le domande da 50 euro e con C le domande da 10 euro. Supponiamo che le domande di tipo A siano 10, quelle di tipo B siano 20 e le C siano 30,

i) Qual'è la probabilità che le 2 domande siano dello stesso tipo?

ii) Se il concorrente, scegliendo a caso, pesca due domande di due tipi diversi, qual'è la probabilità che quella con vincita più alta sia di tipo A?

---

2) Un individuo sa che riceverà una chiamata nella prossima ora. Sia T l'istante aleatorio in cui arriva la chiamata. Calcolare la probabilità di dover aspettare più di mezz'ora se

i) la v.a. T ha distribuzione uniforme in $[0, 1]$.

ii) la v.a. T ha densità pari a

$$f_T(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1}, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

PROBABILITÀ (SIGA - SPRS)

I° PROVA ESONERO - PROF. L. BEGHIN

20-11-2008 (B)

SOLUZIONI:

1) (i) A = "domanda scelta è di tipo A"

B = " " " " " B"

C = " " " " " C"

Chiamo S = "2 domande dello stesso tipo"

V = "domanda con vincita più alta è di tipo A"

$$P(S) = P(AA) + P(BB) + P(CC)$$

$$= \frac{10}{60} \cdot \frac{9}{59} + \frac{20}{60} \cdot \frac{19}{59} + \frac{30}{60} \cdot \frac{29}{59} = \frac{134}{354} = \frac{67}{177}$$

(ii) $$P(V \mid S^c) = \frac{P(V \cap S^c)}{P(S^c)}$$

$$P(V \cap S^c) = P[(AB) \cup (BA) \cup (AC) \cup (CA)]$$

$$= 2\, P[(AB) \cup (AC)]$$

$$= 2\big(P(AB) + P(AC)\big) = 2 \cdot \frac{10 \cdot 20 + 10 \cdot 30}{60 \cdot 59}$$

$$= \frac{50}{177}$$

$$P(V \mid S^c) = \frac{\frac{50}{177}}{1 - \frac{67}{177}} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$$

2) (i) $P\left(T > \frac{1}{2}\right) = ?$ se $T \sim Unif[0,1]$

$$P\left(T > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx = \frac{1}{2}$$

(ii) $$P\left(T > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} n(1-t)^{n-1} dt = \left[-(1-t)^n\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

APPELLO STRAORD. (8 CFU - SIGA SPRS)

ES. 2) ii) $$ET = n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}\, dt$$

$$= n \, Beta(2,n)$$

$$= n \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$= n \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

oppure per parti $$n\int_0^1 t(1-t)^{n-1} dt$$

$$= n\left[-t\,(1-t)^n\right]_0^1 + \int_0^1 (1-t)^n dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

iii) $$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1-(1-t)^n & 0 < t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$\forall\ t \in (0,1)$ $$F_n(t) = n\int_0^t (1-x)^{n-1} dx = \left[-(1-x)^n\right]_0^t =$$

$$= 1-(1-t)^n \implies \boxed{T_n \xrightarrow{d} X \overset{q.c.}{=} 0}$$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:.......................................

Numero di CFU:..........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

Prova di esonero del 20 novembre 2008 (B)

1) Una persona partecipa ad un quiz. Esso consiste di due domande che deve scegliere a caso da un insieme di 60. Le domande sono divise in tre gruppi a seconda della vincita in caso di risposta corretta: indichiamo con A le domande da 100 euro, con B le domande da 50 euro e con C le domande da 10 euro. Supponiamo che le domande di tipo A siano 10, quelle di tipo B siano 20 e le C siano 30,

i) Qual'è la probabilità che le 2 domande siano dello stesso tipo?

ii) Se il concorrente, scegliendo a caso, pesca due domande di due tipi diversi, qual'è la probabilità che quella con vincita più alta sia di tipo A?

---

2) Un individuo sa che riceverà una chiamata nella prossima ora. Sia T l'istante aleatorio in cui arriva la chiamata. Calcolare la probabilità di dover aspettare più di mezz'ora se

i) la v.a. T ha distribuzione uniforme in $[0, 1]$.

ii) la v.a. T ha densità pari a

$$f_T(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1}, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

PROBABILITÀ (SIGA - SPRS)

I° PROVA ESONERO - PROF. L. BEGHIN

20-11-2008 (B)

SOLUZIONI:

1) (i) A = "domanda scelta è di tipo A"

B = " " " " " B"

C = " " " " " C"

Chiamo S = "2 domande dello stesso tipo"

V = "domande con una che più oltre è di tipo A"

$$P(S) = P(AA) + P(BB) + P(CC)$$

$$= \frac{10}{60}\cdot\frac{9}{59} + \frac{20}{60}\cdot\frac{19}{59} + \frac{30}{60}\cdot\frac{29}{59} = \frac{134}{354} = \frac{67}{177}$$

(ii) $$P(V \mid S^c) = \frac{P(V \cap S^c)}{P(S^c)}$$

$$P(V \cap S^c) = P[(AB) \cup (BA) \cup (AC) \cup (CA)]$$

$$= 2\, P[(AB) \cup (AC)]$$

$$= 2\left(P(AB) + P(AC)\right) = 2 \cdot \frac{10\cdot 20 + 10\cdot 30}{60\cdot 59}$$

$$= \frac{50}{177}$$

$$P(V \mid S^c) = \frac{\frac{50}{177}}{1-\frac{67}{177}} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$$

2) (i) $P\left(T > \frac{1}{2}\right) = ?$ se $T \sim Unif[0,1]$

$$P\left(T > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx = \frac{1}{2}$$

(ii) $$P\left(T > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} n(1-t)^{n-1}\,dt = \left[-(1-t)^n\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

APPELLO STRAORD. (8 CFU - SIGA SPRS)

Es. 2) ii) $$ET = n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}\,dt$$

$$= n\,\mathrm{Beta}(2,n)$$

$$= n\,\frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$= \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

oppure per parti $$n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}\,dt$$

$$= \cancel{n\left[-t(1-t)^n\right]_0^1} + \int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

iii) $$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1-(1-t)^n & 0 < t < 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \xrightarrow{n\to+\infty} F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$\forall\ t \in (0,1)$ $$F_n(t) = n\int_0^t (1-x)^{n-1}\,dx = \left[-(1-x)^n\right]_0^t =$$

$$= 1-(1-t)^n \implies \boxed{T_n \xrightarrow{d} X \overset{q.c.}{=} 0}$$