Cognome:... Nome:...
Corso di laurea......................................☐ 8 CFU ☐ 5 CFU

Probabilità
Prof. L.Beghin
I prova scritta 29-1-2008

Esercizio 1

Indichiamo con $U_1, ..., U_n$ n urne contenenti palline bianche e nere in proporzioni diverse. Più precisamente l'urna U_i contiene $i-1$ palline bianche e $i+1$ palline nere, $i = 1, 2, .., n$.

Viene scelta l'urna U_i con probabilità $p_i = ki^2$ e da questa si estraggono due palline con ripetizione. Calcolare

i) la costante k.

Suggerimento: si ricordi che la somma dei quadrati dei primi n naturali è pari a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ii) la probabilità dell'evento $E =$ "due palline di colore diverso".

Esercizio 2

Sia X una v.a. con la seguente funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Determinare

i) la distribuzione della v.a.

$$Y = \frac{X^2}{2}.$$

ii) il EY.

Esercizio 3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ma non identicamente distribuite e sia l'n-esima variabile distribuita come un'esponenziale di parametro n, ovvero

$$X_n \sim Exp(n).$$

Studiare la convergenza in distribuzione della successione

$$Y_n = \frac{X_n}{X_n + X_{n+1}}.$$

SOLUZIONI PROBABILITÀ

BEGHIN 29-1-2008

ES. 1

i) $U_i < \begin{matrix} i-1 & B \\ i+1 & N \end{matrix}$ $2i$ palline totali $i = 1, \dots n$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = k \sum_{i=1}^{n} i^2 = k \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

ii) $P(E) = P((BN) \cup (NB)) = 2P(BN)$

$$= 2P((BN) \cap \Omega) = 2P\left((BN) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} P((BN) \cap U_i)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} P((BN) | U_i) P(U_i)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} k \cancel{i^2} \cdot \frac{(i-1)(i+1)}{(2\cancel{i})^2}$$

$$= 2k \sum_{i=1}^{n} (i^2 - 1) = \frac{2k}{4} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n \right) =$$

$$= \frac{k}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{(n+1)(2n+1)} \right]$$

Es. 2

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$Y = \frac{X^2}{2} \qquad Y \in (0, +\infty)$$

(1) $$P(Y<y) = P\left(\frac{X^2}{2} < y\right) = P(X^2 < 2y)$$

$$= P(-\sqrt{2y} < X < \sqrt{2y})$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{2y}}^{0} e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{2y}} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{-\sqrt{2y}}^{0} + \frac{1}{2}\left[e^{-x}\right]_{0}^{\sqrt{2y}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{2y}}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{2y}}\right)$$

$$= 1 - e^{-\sqrt{2y}} \qquad y > 0 \quad \Rightarrow \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{2y}} & y > 0 \end{cases}$$

$$EY = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{2} e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-x}\,dx \qquad -x = z \quad dx = -dz$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_{0}^{+\infty} \frac{z^2}{2} e^{-z}\,dz = \frac{1}{2}\Gamma(3) = 1$$

oppure

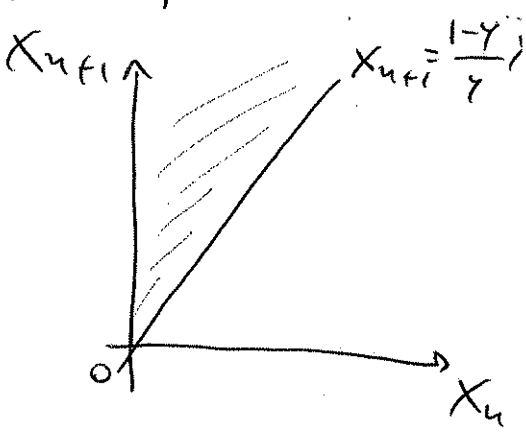
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{2y}}}{\sqrt{2y}} & y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e $$EY = \int_{0}^{+\infty} y \frac{e^{-\sqrt{2y}}}{\sqrt{2y}}\,dy = [\sqrt{2y} = z] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{+\infty} z^2 e^{-z}\,dz = 1$$

Es. 3

$$Y_n = \frac{X_n}{X_n + X_{n+1}} \qquad X_n \sim \exp(n)$$

$\cdot\ Y_n \in (0,1)$ p.c.



$$P(Y_n < y) = P\left(\frac{X_n}{X_n + X_{n+1}} < y\right)$$

$$= P\left(X_{n+1} > \frac{1-y}{y} X_n\right)$$

$$= n(n+1) \int_0^{+\infty} dx_n \int_{\frac{1-y}{y}x_n}^{+\infty} dx_{n+1}\, e^{-n x_n} e^{-(n+1)x_{n+1}}$$

$$= n \int_0^{+\infty} e^{-n x_n} \left[-e^{-(n+1)x_{n+1}}\right]_{\frac{1-y}{y}x_n}^{+\infty} dx_n$$

$$= n \int_0^{+\infty} e^{-n x_n} e^{-(n+1)\frac{1-y}{y}x_n}\, dx_n$$

$$= n \int_0^{+\infty} e^{-x_n\left(\frac{1-y+n}{y}\right)} dx_n$$

$$= \frac{ny}{1-y+n}\left[-e^{-x_n\left(\overbrace{\frac{1-y+n}{y}}^{>0}\right)}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{ny}{1+n-y} \xrightarrow{n \to +\infty} y \qquad 0 < y \leq 1 \qquad F_{Y_n}(y) \to F_Y(y) = \begin{cases} 0 \\ y \\ 1 \end{cases}$$

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea.................................... ☐ 5 CFU ☐ 8 CFU

Probabilità (SIGA)- (SPRS)
Prof. L.Beghin
Prova scritta 14-2-2008

Esercizio 1

In un gruppo di n studenti n_1 frequentano il I anno, n_2 frequentano il II anno e n_3 il III. Supponiamo di scegliere a coso due studenti e che gli studenti scelti frequentino due classi diverse.

i) Calcolare la probabilità che lo studente che frequenta la classe più avanzata sia al III anno.

ii) Calcolare la probabilità dell'evento precedente se i due studenti scelti frequentano classi successive (ad un solo anno di distanza).

Esercizio 2

Si consideri la v.a. doppia (X, Y) distribuita come un'Uniforme sul triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1/2,0)$ nel piano (x, y).

Calcolare:

i) la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria $Z = Y + 4X$;

ii) il EZ.

Esercizio 3

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di variabile aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite e sia Y una v.a. con la stessa distribuzione ma indipendente dalle precedenti. Studiare la convergenza in probabilità della successione definita come

$$\frac{Y}{\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}{n}}}$$

i) se le X_i e la Y sono $N(0, a^2)$;

ii) se X_i e la Y sono $Exp(\sqrt{2}\lambda)$.

ES. 2 (5 CFU) SOLO PUNTO ii)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<2-4x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$EZ = EY + 4EX$$

$$f_Y(y) = 2\int_0^{\frac{2-y}{4}} 1_{\{0<y<2\}}\, dx = \left(1 - \frac{y}{2}\right) 1_{0<y<2}$$

$$\Rightarrow EY = \int_0^2 y\, dy - \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\, dy = \frac{2}{3}$$

$$f_X(x) = 2\int_0^{2-4x} 1_{\{0<x<\frac{1}{2}\}}\, dy = 2(2-4x)\, 1_{\{0<x<\frac{1}{2}\}}$$

$$\Rightarrow EX = 4\int_0^{1/2} x\, dx - 8\int_0^{1/2} x^2\, dx = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \quad EZ = \frac{4}{3}$$

SOLUZIONI PROBABILITÀ

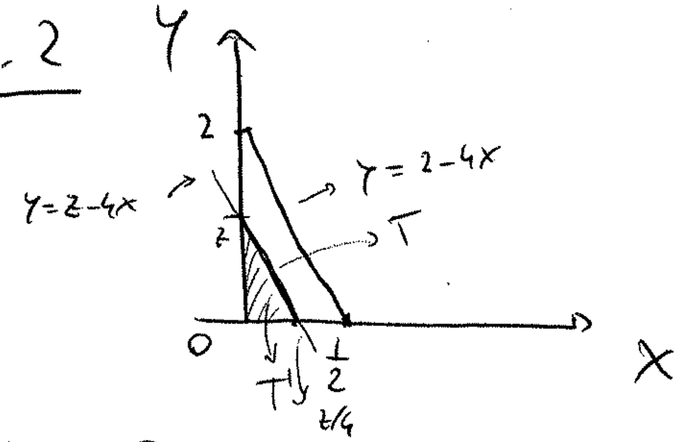
BEGHIN 14-2-2008

ES. 1

i) $$\frac{\mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3}$$

ii) $$\frac{\cancel{\mu_2}\mu_3}{\mu_1\cancel{\mu_2} + \cancel{\mu_2}\mu_3} = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3}$$

ES. 2



i) $Z = Y + 4X$ $\qquad Z \in (0, 2)$ p.c.

$$f_{X,Y}(x,y) = k\,\mathbb{1}_{\{0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<2-4x\}} = \begin{cases} k & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = K \cdot \text{Area}(T) = 1$$

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \implies K = 2$$

$$F_Z(z) = P(Y + 4X < z) = P(Y < z - 4X) \qquad 0<z<2$$

$$= 2 \cdot \text{Area}(T')$$

$$= 2\left(\frac{z}{4} \cdot z \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{z^2}{4}$$

$$\implies f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & 0<z<2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ii) $EZ = \int_0^2 \frac{z^2}{2}\,dz = \frac{1}{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

Es 3 $\quad Z_n = \dfrac{Y}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}} \xrightarrow{P} \dfrac{Y}{\sqrt{EX^2}}$ per la legge debole dei g.n. e poiché $g(X,Y) = Z$ è una funzione continua.

i) se $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ (come Y) si ha

$EX^2 = \sigma^2$ e quindi

$Z_n \xrightarrow{P} \dfrac{Y}{\sigma} \sim N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2}\right) \Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} Z \sim N(0,1)$

ii) se $X_i, Y \sim Exp(\sqrt{2}\lambda)$

$EX^2 = \dfrac{2!}{(\sqrt{2}\lambda)^2} = \dfrac{2!}{2\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$ e quindi

$Z_n \xrightarrow{P} \dfrac{Y}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda Y = Z$ e

$z > 0$

$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\lambda Y < z)$

$= P\left(Y < \dfrac{z}{\lambda}\right)$

$= 1 - e^{-\sqrt{2}\cancel{\lambda}\frac{z}{\cancel{\lambda}}} = 1 - e^{-\sqrt{2}z}$

$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{P} Z \sim Exp(\sqrt{2})$

Cognome:................................Nome:...............................

Corso di laurea...........................☐ 8 CFU ☐ 5 CFU

Probabilità

Prof. L.Beghin
Prova scritta 27-3-2008
Appello straordinario

Esercizio 1

Un giocatore partecipa al seguente gioco: lancia ripetutamente un dado regolare fino a che esce la faccia 6 e a quel punto incassa un importo aleatorio pari a $Y = X_N$, dove N rappresenta il numero di lanci del dado che deve effettuare e, per ogni $n \in N$, $X_n \sim \exp(n)$.

Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y, che rappresenta la sua vincita.

Esercizio 2

Siano $Z_1, ... Z_n$ variabili aleatorie tra loro indipendenti e sia, $\forall j$, $Z_j \sim Poisson(\lambda_j)$, con $\lambda_j = q^j$, per $0 < q < 1$. Studiare la convergenza in distribuzione della successione

$$Z_1 + ... + Z_n.$$

SOLUZIONI SCRITTO 27-3-2008
(APPELLO STRAORDINARIO)

PROBABILITÀ - PROF. L. BEGHIN (SIGA - SPRS)

ESERCIZIO 1

$N \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$. Per $y>0$ la f.r. di $Y = X_N$ è

$$F_Y(y) = P(Y<y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y<y \mid N=n)\, P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n < y)\, P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-ny}\right) \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$= \cancel{\frac{1}{6}} \frac{1}{\cancel{1-\frac{5}{6}}} - \frac{1}{6} e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6} e^{-y}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{e^{-y}}{6} \frac{1}{1-\frac{5}{6}e^{-y}} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - \frac{1}{6e^{y}-5} & y>0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

$$Z_1 + \dots + Z_n \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{n} q^i\right).$$

Infatti per $n=2$ si ha applicando la formula di convoluzione

$$P(Z_1+Z_2 = y) = \sum_{j=0}^{y} \frac{e^{-q} q^j}{j!} \frac{e^{-q^2} (q^2)^{y-j}}{(y-j)!} =$$ (moltiplicando e dividendo per $y!$)

$$= \frac{e^{-q-q^2}}{y!} \sum_{j=0}^{y} \binom{y}{j} q^j (q^2)^{y-j} = \frac{e^{-(q+q^2)}}{y!} (q+q^2)^y$$

e così via.

Quindi $Z_1 + \dots + Z_n \xrightarrow{d} Y \sim \text{Poisson}\left(\frac{q}{1-q}\right)$ poiché $\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$