Cognome:................................ Nome:....................................
.Data esame orale:.........☐ 13-9-2007..........☐ 25-9-2007

Probabilità (SIGA) - Prof. L.Beghin
11-9-2007

Esercizio 1

In fila allo sportello di una banca ci sono $d+u$ persone dei quali $d \geq 3$ sono donne e $u \geq 1$ sono uomini. Si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

a) l'ultima persona della fila sia una donna;

b) la prima e l'ultima persona della fila siano donne;

c) l'ultima persona della fila sia una donna, sapendo che sia la prima che la seconda sono donne.

Esercizio 2

Siano Y e Z due variabili aleatorie indipendenti e sia il vettore (Y, Z) distribuito uniformemente sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

Si ricavi la funzione di ripartizione della v.a.

$$X = \frac{\log Z}{\log Y}.$$

Esercizio 3

Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti con densità, per ogni n fissato, esponenziale di parametro n^2.

Studiare la convergenza, per $n \to +\infty$, delle seguenti successioni di v.a.

$$Y_n = nX_n - 1$$

e

$$Z_n = nX_n - n.$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) $P(\text{ultima } D) = \dfrac{d}{d+u}$

è un'estraz. di 1 ogg. da u gruppo

b) $P(I^\circ D \cap \text{ultima } D) = \dfrac{d(d-1)}{(d+u)(d+u-1)}$

come 2 estraz. senza rip. da U_{d+u} (d, u)

Succ. = d

P(2 succ. su 2) =

c) $P(\text{ultima } D \mid I^\circ D \cap II^\circ D) = \dfrac{P(I^\circ D \cap II^\circ D \cap \text{ultima } D)}{P(I^\circ D \cap II^\circ D)}$

$$= \frac{\cancel{\frac{d}{d+u}} \cdot \cancel{\frac{d-1}{d+u-1}} \cdot \frac{d-2}{d+u-2}}{\cancel{\frac{d(d-1)}{(d+u)(d+u-1)}}} = \frac{d-2}{d+u-2}$$

ESERCIZIO 2

$(Y, Z) \sim \text{Unif}\,[0,1]\times[0,1]$ indip.

$\Rightarrow \quad Y \sim \text{Unif}\,[0,1]$

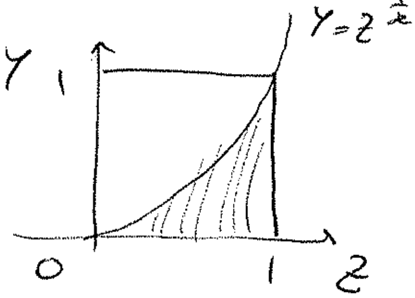
e $\quad Z \sim \text{Unif}\,[0,1]$ $\qquad$ e $\qquad X = \dfrac{\log Z}{\log Y} \in [0,+\infty)$ p.

$$F_X(x) = P\left(\frac{\log Z}{\log Y} < x\right) \qquad \text{per } x \geq 0$$

$$= P\left(\log Z > x \log Y\right)$$

$$= P\left(Z > e^{x \log Y}\right) = P\left(Z > e^{\log Y^x}\right)$$

$$= P\left(Z > Y^x\right) = P\left(Z^{\frac{1}{x}} > Y\right)$$



$$= \int_0^1 dz \int_0^{z^{\frac{1}{x}}} dy = \int_0^1 dz \cdot z^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1} z^{\frac{1}{x}+1}\Big]_0^1 = \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

$X_n \sim \exp(n^2) \qquad \Rightarrow \quad Y_n \in (-1,+\infty)$ p.c.

$$F_{Y_n}(y) = P\left(n X_n - 1 < y\right) \qquad \text{per } y \geq -1$$

$$= P\left(X_n < \frac{y+1}{n}\right) = 1 - e^{-n^2 \cdot \frac{y+1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{poiché } y+1>0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Y_n}(y) \longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ 1 & y > -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y_n \xrightarrow[d]{P} Y \overset{p.c.}{=} -1$$

$Z_n = n X_n - n \qquad Z_n \in (-n, +\infty)$ q.c.

Per ogni n fissato e per $z > -n$

$$F_{Z_n}(z) = P(n X_n - n < z)$$

$$= P\left(X_n < \frac{z+n}{n} \right)$$

$$= 1 - e^{-n^2 \frac{z+n}{n}}$$

Ma per $n \to +\infty$ Z_n non converge poiché le probabilità tende a concentrarsi in $-\infty$.

Cognome:.. Nome:..Corso di Laurea:..

Numero di CFU:..........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

Prova di esonero del 26 novembre 2007 ore 8,30 (A)

1) Una lettera spedita per posta ordinaria non arriva a destinazione, con probabilità pari ad 1/10 (indipendentemente dalle altre lettere). Se la lettera non arriva, viene restituita al mittente con probabilità pari a v. Ogni giorno vengono spedite in un certo paese 100 lettere.

i) Trovare la probabilità che in un giorno 3 lettere tornino al mittente.

ii) Quale distribuzione di probabilità possiede la variabile aleatoria "numero di lettere che tornano al mittente"?

iii) Calcolare il numero massimo di lettere che si possono spedire al giorno perchè si abbia una probabilità almeno pari ad $\frac{1}{e}$ che tutte le lettere arrivino.

---

2) Si consideri la seguente funzione

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ 1 - \frac{k}{\mu+3(z-1)} & z > 1 \end{cases},$$

con $\mu > 0$.

i) Si determini il valore della costante k tale che la F_Z sia la funzione di ripartizione di una v.a. Z assolutamente continua

ii) Si calcoli la funzione di densità di Z, dandone eventualmente una rappresentazione grafica.

iii) Si calcolino $P(\frac{1}{2} < Z < 2)$ e $P(Z > 2)$.

PROBABILITÀ (BEGHIN)

I° ESONERO - COMPITO A - ORE 8,30 - 26-11-2007

I) (i) X = "n° lettere che tornano al mittente"

$X \sim Bin\left(100, \frac{v}{10}\right)$

(ii) $P(X=3) = \binom{100}{3}\left(\frac{v}{10}\right)^3\left(1-\frac{v}{10}\right)^{97}$

(iii) $P(\text{Tutte arrivano}) = \left(\frac{9}{10}\right)^n > \frac{1}{e} \Rightarrow n \ln\frac{9}{10} > \ln\frac{1}{e} = -1$

$\Rightarrow n \leq -\frac{1}{\ln\frac{9}{10}} = \frac{1}{0,105} = 9,52 \Rightarrow n \leq 9$

II) $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 1 \\ 1 - \frac{k}{\mu+3(z-1)} & z > 1 \end{cases} \qquad \mu > 0$

(i) $0 = F_Z(1) = F_Z(1^+) = 1 - \frac{k}{\mu} \Rightarrow k = \mu$

(ii) $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{altrove} \\ \frac{3\mu}{(\mu+3(z-1))^2} & z > 1 \end{cases}$

(iii) $P\left(\frac{1}{2} < Z < 2\right) = F_Z(2) - F_Z\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\mu}{\mu+3} = \frac{3}{\mu+3}$

$P(Z > 2) = 1 - F_Z(2) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\mu}{\mu+3} = \frac{\mu}{\mu+3}$

Cognome:.. Nome:..Corso di Laurea:...

Numero di CFU:..........(solo per SPRS)

Probabilità (SIGA- SPRS)
Prof. L.Beghin

Prova di esonero del 26 novembre 2007 ore 8,30 (B)

1) La compagnia aerea SIGMA ha, su una certa rotta, 10 voli a settimana. Ciascun aereo della SIGMA ha probabilità pari a r di rompersi, indipendentemente dagli altri aerei. Se un aereo si rompe, la probabilità che il volo venga annullato è pari a q.

i) Trovare la probabilità che durante una certa settimana vengano annullati 2 voli.

ii) Quale distribuzione di probabilità possiede la variabile aleatoria "numero di voli annullati"?

iii) Se $r = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{2}$ qual'è il numero minimo di voli che la SIGMA deve programmare a settimana per avere una probabilità almeno pari a $\left(\frac{7}{8}\right)^9$ che siano garantiti 9 voli.

---

2) Si consideri la seguente funzione

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{y}} & 1 < y \leq 4 \\ 1 - \frac{1}{ky} & y > 4 \end{cases} .$$

i) Si determini il valore della costante k tale che la F_Y sia la funzione di ripartizione di una v.a. Y assolutamente continua.

ii) Si calcoli la funzione di densità di Y, dandone eventualmente una rappresentazione grafica.

iii) Si calcolino $P(\frac{1}{2} < Y < 2)$ e $P(Y > 8)$.

PROBABILITÀ (BEGHIN)

I ESONERO - COMPITO B - ORE 8,30 - 26-11-07

I)

2) X = n° voli annullati alla settimana

$X \sim Bin(10, rq)$

1) $P(X=2) = \binom{10}{2}(rq)^2(1-rq)^8 = 45 \cdot (rq)^2(1-rq)^8$

3) $r = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{2} \implies X \sim Bin\left(10, \frac{1}{8}\right)$

$P(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{7}{8}\right)^n > \frac{1}{e} \implies \left(\frac{7}{8}\right)^n > \frac{1}{e} \implies n \ln\frac{7}{8} > -1$

$n < -\frac{1}{\ln\frac{7}{8}} = \frac{1}{0,13} = 7,48 \qquad n \leq 7$

II)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{y}} & 1 < y \leq 4 \\ 1 - \frac{1}{ky} & y > 4 \end{cases}$$

i) $F_Y(4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = F_Y(4^+) = 1 - \frac{1}{k4}$

$\frac{4k-1}{\cancel{4}k} = \frac{1}{\cancel{2}} \implies 4k - 2k = 1 \qquad k = \frac{1}{2}$

(ii) $$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} & 1 < y \leq 4 \\ \frac{2}{y^2} & y > 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(iii) $P\left(\frac{1}{2} < Y < 2\right) = F_Y(2) - \overbrace{F_Y\left(\frac{1}{2}\right)}^{=0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$P(Y > 8) = 1 - F_Y(8) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

I° ESONERO ORE 15,00 - COMPITO C

PROBABILITÀ - BEGHIN

I) S = "madre è portatrice sana"

E_i = "~~figlio~~ i-esimo è malato di emofilia" $\quad i=1,2$

$P(S)=\frac{1}{4} \qquad P(E_i|S)=\frac{1}{2} \qquad P(\bar{E}_i|S)=\frac{1}{2}$

$P(\bar{S})=\frac{3}{4} \qquad P(E_i|\bar{S})=0 \qquad P(\bar{E}_i|\bar{S})=1$

(i) $$P(\bar{E}_2|\bar{E}_1) = \frac{P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2)}{P(\bar{E}_1)}$$

$$P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2) = P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2|S)\,P(S) + \overbrace{P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2|\bar{S})}^{=1}\,P(\bar{S})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{13}{16}$$

$$P(\bar{E}_1) = P(\bar{E}_1|S)\,P(S) + \overbrace{P(\bar{E}_1|\bar{S})}^{1}\,P(\bar{S})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{E}_2|\bar{E}_1) = \frac{13}{\cancel{16}_2}\cdot\frac{\cancel{8}}{7} = \frac{13}{14}$$

(ii) $$P(S|\bar{E}_1\bar{E}_2) = \frac{P(\bar{E}_1\bar{E}_2|S)\;P(S)}{P(\bar{E}_1\cap\bar{E}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{13}{16}} = \frac{1}{13}$$

II) (i) F_Z è non-decrescente, continua a dx. e

$\lim_{z\to-\infty} F_Z(z)=0 \qquad \lim_{z\to+\infty} F_Z(z)=1 \quad \Rightarrow F_Z$ è f.r.

(ii) Non è una v.a. ass. continua poiché $F_Z(1)=0\neq F_Z(1^+)=\frac{1}{3}$

$$P(Z=1) = \frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

(iii) $$P(1<Z\leq 3) = F_Z(3)-F_Z(1^+) = \frac{3}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

PROBABILITÀ — BEGHIN

I° ESONERO - COMPITO D   ORE 15,00

I) A = orologio prodotto da catena A

B = " " " " B

D_i = orologio i-esimo è difettoso $\quad i = 1, 2$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(D_i|A) = \frac{1}{2} \qquad P(\bar{D}_i|A) = \frac{1}{2}$$

$$P(D_i|B) = 0 \qquad P(\bar{D}_i|B) = 1$$

(i) $$P(\bar{D}_2|\bar{D}_1) = \frac{P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2)}{P(\bar{D}_1)}$$

$$P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2|A)P(A) + P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2|B)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow P(\bar{D}_2|\bar{D}_1) = \frac{\frac{5}{8}}{P(\bar{D}_1|A)P(A) + P(\bar{D}_1|B)P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

(ii) $$P(A|\bar{D}_1\bar{D}_2) = \frac{P(\bar{D}_1\bar{D}_2|A)\,P(A)}{P(\bar{D}_1\bar{D}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

II) (i) $P(Y=1) = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow F_Y(1) + P(Y=1) = 0 + \frac{1}{3} = F_Y(1^+) = 1 - \frac{3-1}{k} = 1 - \frac{2}{k}$$

$$\Rightarrow k = 3$$

(ii) F_Y è non decresc. e continua e sin.

$\lim_{y \to +\infty} F_Y(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{3y}\right) = 1$. Non è ass. continua

(iii) $P(Y=2) = 0 \qquad P\left(\frac{1}{2} < Y < 4\right) = F_Y(4) - F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$

Cognome:.. Nome:..Corso di Laurea:..

Probabilità (SIGA)
Prof. L.Beghin

Appello straordinario 26-11-2007 (A)

1) Una lettera spedita per posta ordinaria non arriva a destinazione, con probabilità pari ad 1/10, indipendentemente dalle altre lettere. Se la lettera non arriva, viene restituita al mittente con probabilità pari a ν. Ogni giorno vengono spedite in un certo paese 100 lettere.

i) Trovare la probabilità che in un giorno 3 lettere tornino al mittente.

ii) Si calcoli il valor medio della v.a. "numero di lettere che tornano al mittente".

iii) Calcolare il numero massimo di lettere che si possono spedire al giorno perchè si abbia una probabilità almeno pari ad $\frac{1}{e}$ che tutte le lettere arrivino.

---

2)

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. esponenziali di parametro n, indipendenti tra loro.

Si studi la convergenza della successione definita come

$$Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\} \log n.$$

PROBABILITÀ (BEGHIN)

APPELLO STRAORDINARIO ORE 8,30 - 26-11-07

I) vedi compito A

+ (ii) $EX = 100 \cdot \frac{v}{10} = 10 \cdot v$

II) $\{X_n\}$ $X_n \sim \exp(n)$ indip.

$$Y_n = \min\{X_1, \dots X_n\} \cdot \log n$$

$Y_n > 0$ q.c. $\forall n$ $\Rightarrow$ per $y > 0$

$$P(Y_n < y) = P(\min\{X_1 \dots X_n\} \cdot \log n < y)$$

$$= P\left(\min\{X_1 \dots X_n\} < \frac{y}{\log n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \left\{X_j > \frac{y}{\log n}\right\}\right)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j > \frac{y}{\log n}\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n} e^{-j\frac{y}{\log n}}$$

$$= 1 - e^{-\sum_{j=1}^{n} j \frac{y}{\log n}} = 1 - e^{-\frac{n(n+1)}{2}\frac{y}{\log n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \quad Y_n \xrightarrow[P]{d} Y \overset{q.c.}{=} 0$$