PROBABILITA' - SUPPORTO
I PROVA DI ESONERO 2003/2004
14-4-2004

1) Data la variabile aleatoria X con funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & -2 \leq x < 0 \\ \frac{c_2}{6} e^{-x/6} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

si determinino le costanti c_1 e c_2, sapendo che la probabilità che X sia negativa è uguale ad un terzo della probabilità che sia positiva. Si calcoli inoltre la probabilità che sia $X < 6$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} P(X &< 0) = 2c_1 = \frac{1}{3}P(X > 0) = \frac{c_2}{3} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{c_2}{6} \\ 2c_1 + c_2 &= 1 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \frac{3}{4},\ c_1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$P(X < 6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\int_0^6 e^{-x/6}dx = 1 - \frac{3}{4e}$$

2) Sul mercato esistono computer di due marche, A e B. La marca A detiene il 60% delle quote di mercato. Il numero di difetti di produzione per ogni computer di marca A si distribuisce come una $Poisson(2)$, mentre per quelli di marca B è una $Poisson(3)$.

i) calcolare la probabilità che un computer acquistato abbia 2 difetti;

ii) se su di esso si riscontrano 3 difetti, determinare la probabilità che sia del tipo A.

Soluzione: si indichi con X la v.a. "numero di difetti"; allora i dati del problema si possono riassumere come segue:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.6,\ P(B) = 0.4 \\ P(X|A) &\sim Poisson(2),\ P(X|B) \sim Poisson(3). \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} P(X &= 2) = P(X = 2|A)P(A) + P(X = 2|B)P(B) \\ &= 2e^{-2}0.6 + \frac{9}{2}e^{-3}0.4 = 0.16 + 0.09 = 0.25 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{8}(x+2) & -2 < x < 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(e^{-\frac{x}{6}} - 1\right) & 0 < x < \infty \end{cases}$$

1

ii) Usando la formula di Bayes si ha

$$
\begin{aligned}
P(A|X &= 3) = \frac{P(X=3|A)P(A)}{P(X=3|A)P(A)+P(X=3|B)P(B)} \\
&= \frac{e^{-2}\frac{2^3}{3!}0.6}{e^{-2}\frac{2^3}{3!}0.6+e^{-3}\frac{3^3}{3!}0.4} \\
&= \frac{0.65}{0.65+0.54} = 0.55.
\end{aligned}
$$

3) Un giocatore lancia un dado regolare.
i) Calcolare la probabilità di ottenere 6 almeno una volta in tre lanci;
ii) Qual è il numero minimo di lanci del dado necessari affinchè la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90% ?
Soluzione:
i)

$$
\begin{aligned}
P(6 \text{ almeno una volta su tre}) &= 1-P(\text{mai } 6) \\
&= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \quad \frac{91}{216} = 0{,}42
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
P(6 \text{ almeno una volta su } n) &= 1-P(\text{mai } 6) \\
&= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.9.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
0.1 &\geq \left(\frac{5}{6}\right)^n \\
\ln 0.1 &\geq n \ln\frac{5}{6} = n\ln 0.83 \\
n &\geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.83} = \frac{2.3}{0.19} = 12.1
\end{aligned}
$$

e, poichè n deve essere intero il numero minimo di lanci sarà pari a 13.

Cognome:.. Nome:..

Probabilità (SIGEA) - Prof. L.Beghin
Prova scritta 10-7-2007

Esercizio 1

Tre scatole contengono ciascuna due monete; la prima ha due monete d'argento, la seconda ne ha una d'oro e l'altra d'argento e la terza due d'oro.

Si sceglie a caso una scatola e quindi da essa si estrae una moneta, che risulta essere d'oro: con che probabilità anche l'altra moneta è d'oro?

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} c|\sin x|, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

per una costante $c > 0$.

Calcolare:

i) la costante c in modo tale che $f(x)$ sia la funzione di densità di una variabile aleatoria X;

ii) la funzione di ripartizione associata;

iii) la densità della variabile aleatoria $Y = X^2$;

iv) la $P(Y \leq \pi^2/9)$.

Esercizio 3

Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di variabile aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione $Unif\,[0,1]$.

i) Determinare a_n e b_n tali che la successione

$$\frac{X_1 + ... + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1).$$

ii) Studiare il limite in probabilità della successione

$$Z_n = \frac{X_1^2 + ... + X_n^2}{n}.$$

$\boxed{\text{SOLUZIONI}}$

|AA| Urna A |AO| Urna B |OO| Urna C

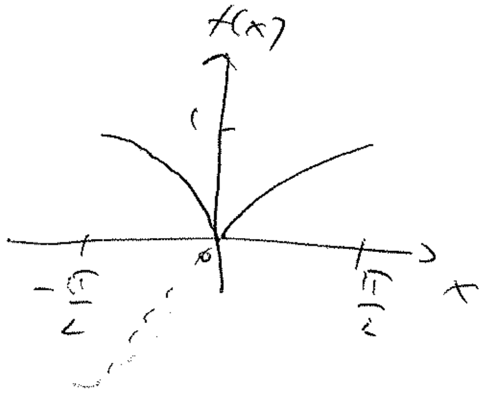
ES. 1

$P(C|E) = ?$ $E =$ "moneta estratta è O"

Formula di Bayes:

$$P(C|E) = \frac{P(E|C)\,P(C)}{P(E|A)\,P(A) + P(E|B)\,P(B) + P(E|C)\,P(C)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{0 \cdot \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} + 1 \cdot \cancel{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}$$



ES. 2

i) $$c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx$$

$$= c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x) dx + c \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= c \left[\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - c \left[\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2c = 1 \implies c = \frac{1}{2}$$

ii) $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\frac{\pi}{2} \\ ? & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ ? & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

per $-\frac{\pi}{2} < x \le 0$ $$F_X(x) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} (-\sin u) du = \frac{1}{2} \cos x$$

per $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ $$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} \sin u \, du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos u)_0^x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\cos x$$

$$\implies \boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\cos x & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\cos x & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

$y \in (0, \frac{\pi^2}{4})$ p.c.

iii) $$P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} \le X < \sqrt{y}) =$$

$y > 0$

$F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$= 1 - \frac{1}{2}\cos\sqrt{y} - \frac{1}{2}\cos(-\sqrt{y})$

$= 1 - \frac{1}{2}\cos\sqrt{y} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{y} = 1 - \cos\sqrt{y} = F_Y(y) \quad 0 < y < \frac{\pi^2}{4}$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-\cos\sqrt{y} & 0 < y \le \frac{\pi^2}{4} \\ 1 & y > \frac{\pi^2}{4} \end{cases}$

$f_Y(y) = \frac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \quad 0 < y < \frac{\pi^2}{4}$

iv) $P\left(Y \le \frac{\pi^2}{9}\right) = F_Y\left(\frac{\pi^2}{9}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ES. 3

a) $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1)$

$a_n = n\,E(X_i) = \frac{n}{2}$

$b_n = \sqrt{n \operatorname{var}(X_i)} = \sqrt{\frac{n}{12}}$ poiché

$\operatorname{var}(X_i) = \int_0^1 x^2\,dx - \frac{1}{4} = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

b) $Z_n = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} E(X_i^2) = \frac{1}{3}$

$Z_n \xrightarrow{P} \frac{1}{3}$

Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea..

Probabilità
Prof. L.Beghin

5-6-2008

Esercizio n.1

Si supponga che il numero di incidenti stradali causati in un anno da autovetture sia distribuito come una Poisson di parametro $\lambda > 0$ e che lo stesso valga per gli incidenti causati da motociclette. Siano inoltre le due variabili aleatorie tra loro indipendenti.

i) Ricavare la distribuzione di probabilità del numero di incidenti motociclistici condizionata sul totale degli incidenti stradali.

ii) Interpretare il risultato in termini di distribuzioni note.

Esercizio n.2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{kx}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2}\right\} & x > 0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases} .$$

i) Ricavare il valore di $k > 0$.

ii) Studiare la convergenza, per $n \to +\infty$ della successione di v.a.

$$Y_n = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\frac{X_i}{n}\right\},$$

ricordando che $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

~~RISULTA~~ $\boxed{\text{SOLUZIONI}}$ X = "n° di incidenti moto"
Y = " " " " auto"

1) $X, Y \sim \text{Poiss}(\lambda)$ indip. $\Longrightarrow X+Y \sim \text{Poiss}(2\lambda)$

$$\Pr\{X=r \mid X+Y=s\} = \frac{\Pr\{X=r, X+Y=s\}}{\Pr\{X+Y=s\}} \qquad r,s=1,2,\dots$$

$$= \frac{\Pr\{X=r\}\Pr\{Y=s-r\}}{\Pr\{X+Y=s\}} = \frac{\cancel{\lambda^{s-r}\lambda^{r}}\, \cancel{e^{-2\lambda}}}{(s-r)!\, r!} \frac{s!}{(2\cancel{\lambda})^s \cancel{e^{-2\lambda}}}$$

$$\binom{s}{r}\frac{1}{2^s}$$

Quindi $(X \mid X+Y=s) \sim Bin\left(s, \frac{1}{2}\right)$

---

2) i) $$\frac{k}{2\sigma^2}\int_0^{+\infty} 2x\, e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{2}\cdot\underbrace{\left[-e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\right]_0^{+\infty}}_{=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

ii) $$Y_n = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right\} \quad e \ X_i \ \text{iid}.$$

Per la l.d.g.n. $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} E(X)$$

$$EX = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\,dx$$

$$= \left[z = \frac{x^2}{\sigma^2} \Rightarrow \cancel{dz} \quad x = \sigma\sqrt{z} \quad dx = \frac{\sigma\, dz}{2\sqrt{z}} \right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sigma^2}}\cdot\frac{\sigma}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\sigma^2}\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{z}}\, e^{-z}\,dz = \sigma\int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}+1-1} e^{-z}\,dz$$

$$= \sigma\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\pi}$$

per il teorema sulle funzioni continue

$$\Rightarrow \quad Y_n \xrightarrow{P} e^{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\pi}}$$

\

Cognome:.. Nome:..

Corso di Laurea..CFU..................................

E-mail:..

Probabilità
Prof. L.Beghin

14-7-2009

Esercizio n.1

Due giocatori si sfidano lanciando una (sola) moneta che dà testa con probablità 0.6 e croce con probabilità 0.4. Il giocatore A vince se esce testa, il giocatore B se esce croce. Calcolare la probablità che:

i) A vinca la sfida in esattamente n lanci, per $n = 5, 6$, se la vittoria è del primo giocatore che ottiene per 4 volte il risultato a lui favorevole.

ii) A vinca la sfida se invece si aggiudica la vittoria il primo che per 2 volte ottiene il risultato a lui favorevole.

iii) Trovare una formula generale per gli altri possibili valori di n per il punto i).

Esercizio n.2

Siano X_j v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di ripartizione pari a

$$F_{X_j}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x > 0 \end{cases}$$

per ogni $j \geq 1$. Si consideri la successione definita come

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1 + X_j)^2 e^{-X_j}$$

e se ne studi la convergenza per $n \to \infty$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO N. 1

$p = P(T) = 0,6 \qquad 1-p = P(C) = 0,4$

(i) $Pr\{A \text{ vince in } 5 \text{ lanci}\} = \binom{4}{3} p^3(1-p)\,p = \boxed{4 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4}$

$Pr\{A \text{ vince in } 6 \text{ lanci}\} = \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 \cdot p = \boxed{10 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^2}$

$\{A \text{ vince}\} = p^2 + 2 \cdot p^2 q = 0,6^2 + 2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4$

-) $\Pr\{A \text{ vince in } n \text{ lanci}\} = \boxed{\binom{n-1}{3} p^4 (1-p)^{n-4} \quad \text{per } n = 4,5,6,7}$

ESERCIZIO N. 2

Si applica la LDGN poiché valgono le condizioni di indipend. e i.d. per le v.a. X_j e quindi anche ~~per j, per~~ per $(1+X_j)^2 e^{-X_j}$ per $j = 1, 2, \ldots$

Quindi $\quad Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[(1+X_j)^2 e^{-X_j}\right] \xrightarrow{P} E\left[(1+X)^2 e^{-X}\right]$

Calcoliamo

$$E\left[(1+X)^2 e^{-X}\right]$$

La f. densità di X è

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{1+x \cancel{-x}}{(1+x)^2} \quad x \geq 0 \qquad \frac{1}{1+x^2}$$

$$\underbrace{E\left[(1+x)^2 e^{-x}\right]}^{g(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{(1+x)^2} e^{-x}}{\cancel{(1+x)^2}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Quindi $\quad \boxed{Y_n \xrightarrow{P} Y \overset{q.c.}{=} 1}$

Bisognerebbe anche verificare che la $\mathrm{Var}\left[(1+X)^2 e^{-X}\right] < \infty$

Basta considerare che

$$E\left[(1+x)^2 e^{-x}\right]^2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^4}{(1+x)^2} e^{-2x} dx < \infty$$