## Esercitazione 10 - Soluzioni

---

**Esercizio 1**

Siano $X_i$ v.a. i.i.d. con distribuzione uniforme in $(0,1)$. Definiamo la successione di v.a.

$$Y_n = X_1 \cdots X_n = \prod_{j=1}^{n} X_j.$$

i) Trovare il limite in probabilità (Si consiglia di passare dalla distribuzione del prodotto alla distribuzione del $\min_{0\le j\le n} X_j$).

ii) Vale anche la convergenza quasi certa?

**Soluzione:**

i) La nuova variabile, definita per $n$ fissato, come

$$Y_n = \prod_{j=1}^{n} X_j \in (0,1) \qquad q.c.$$

Verifico che $Y_n \xrightarrow{p} 0$ e quindi che

$$P\left(|Y_n| > \varepsilon\right) = P(X_1 \cdots X_n > \varepsilon) \to 0$$

per $n \to +\infty$ : poichè la funzione di ripartizione del prodotto di v.a. è complicata da ottenere, passo alla f.r. del minimo, sfruttando il fatto che

$$\{X_1 \cdots X_n > \varepsilon\} \subset \left\{\min_{1\le j\le n} X_j > \varepsilon\right\}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
P(X_1 \cdots X_n &> \varepsilon) \le P\left\{\min_{1\le j\le n} X_j > \varepsilon\right\} \\
&= P\left\{\bigcap_{j=1}^{n} (X_j > \varepsilon)\right\} \\
&= [P(X_j > \varepsilon)]^n \\
&= [1 - P(X_j \le \varepsilon)]^n \\
&= [1-\varepsilon]^n \to 0.
\end{aligned}$$

ii) Per verificare la convergenza q.c. si dimostra che vale la condizione necessaria e sufficiente:

$$P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} |Y_m| > \varepsilon\right\} \to 0$$

Ma si ha che

$$\begin{aligned}
P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty}|Y_m|>\varepsilon\right\} &\leq \sum_{m=n}^{\infty} P(X_1\cdots X_n>\varepsilon)\\
&\leq \sum_{m=n}^{\infty} P\left\{\min_{1\leq j\leq n} X_j>\varepsilon\right\}\\
&= \sum_{m=n}^{\infty}[1-\varepsilon]^m \to 0,
\end{aligned}$$

poichè è il resto $n$-esimo di una serie convergente, essendo $1-\varepsilon<1$. Quindi si ha anche che $Y_n \stackrel{q.c.}{\to} 0$

**Esercizio 2**

Sia $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti e somiglianti, uniformi in $(0,1)$. Studiare la convergenza della successione

$$Y_n=\frac{X_1-X_2+X_3-X_4+...+X_{2n-1}-X_{2n}}{n}$$

**Soluzione:**

Se si definisce la successione di v.a. $Z_j=X_j-X_{j+1}$, per $j=1,...,2n-1$, possiamo riscrivere la successione data come:

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ dispari}}^{2n-1} Z_j.$$

Tale sommatoria ha $n$ termini e le $Z_j$ sono anch'esse i.i.d., quindi si può applicare la legge forte dei grandi numeri per la quale

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ dispari}}^{2n-1} Z_j \underset{q.c.}{\to} EZ_j=0.$$

**Esercizio 3**

Siano $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ due successioni di v.a. indipendenti e somiglianti, con distribuzione esponenziale di parametro $n$. Studiare la convergenza in distribuzione, in probabilità e quasi certa della successione

$$Z_n=\frac{X_n-Y_n}{n}.$$

**Soluzione:** Ricaviamo la f.r. della successione $Z_n\in(-\infty,+\infty)$ q.c.: per

$z > 0$,

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n < z) = P\left(\frac{X_n - Y_n}{n} < z\right) \\ &= P\left(X_n - Y_n < zn\right) \\ &= P\left(Y_n > X_n - zn\right) \\ &= \int\int_{\{(x,y):y>x-zn\}} n^2 e^{-n(x+y)} dxdy. \end{aligned}$$

Distinguiamo i due intervalli $z < 0$ e $z > 0$. Per $z < 0$ si ha

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-nx} \int_{x-zn}^{+\infty} n^2 e^{-ny} dydx \\ &= n \int_0^{+\infty} e^{-2nx+zn^2} dx = \left[-\frac{e^{-2nx+zn^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{e^{zn^2}}{2}. \end{aligned}$$

Per $z > 0$ si ha

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-ny} \int_0^{y+nz} n^2 e^{-nx} dxdx \\ &= n \int_0^{+\infty} e^{-ny} \left[1 - e^{-ny-n^2 z}\right] dx \\ &= 1 - \left[-\frac{e^{-2ny-zn^2}}{2}\right]_0^{\infty} = 1 - \frac{e^{-zn^2}}{2}. \end{aligned}$$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} \frac{e^{zn^2}}{2} & z \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-zn^2}}{2} & z > 0 \end{cases} \rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}.$$

Quindi $Z_n \xrightarrow{d} Z \overset{q.c.}{=} 0$ e anche $Z_n \xrightarrow{p} Z \overset{q.c.}{=} 0$.

Per verificare se vale anche la convergenza q.c., consideriamo separatamente le due successioni $\frac{X_n}{n}$ e $\frac{Y_n}{n}$, che si può verificare convergono in probabilità a zero: infatti

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = P(X_n < n\varepsilon) = 1 - e^{-n\varepsilon} \rightarrow 1$$

e lo stesso vale per $\frac{Y_n}{n}$. Verifichiamo se vale anche q.c.:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \left(\frac{X_n}{n} > \varepsilon\right)\right) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} P\left(X_n > n\varepsilon\right) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} e^{-m\varepsilon} = \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right)^m \end{aligned}$$

che è il resto $n$-esimo di una serie convergente e quindi tende a zero. Quindi $\frac{X_n}{n} \overset{q.c.}{\longrightarrow} 0$ e $\frac{Y_n}{n} \overset{q.c.}{\longrightarrow} 0$ e di conseguenza $\left(\frac{X_n}{n}, \frac{Y_n}{n}\right) \overset{q.c.}{\longrightarrow} (0,0)$. Infine, applicando il teorema sulle funzioni continue, si ha che

$$Z_n = \frac{X_n}{n} - \frac{Y_n}{n} \overset{q.c.}{\longrightarrow} 0.$$