Esercitazione 9 – soluzioni

Esercizio 1: Sia $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti avente la seguente funzione di ripartizione, per ogni n

$$F_n(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y^n} & y > 1 \end{cases}$$

e sia X, indipendente dalle Y_n, una v.a. con f.r.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}.$$

Studiare la convergenza di

$$Z_n = \frac{X}{X + Y_n}$$

Suggerimento: si consiglia di studiare la convergenza di Y_n e di applicare il Teorema sulla funzione continua (sfruttando l'indipendenza delle v.a.).

Soluzione: Si vede facilmente che $Y_n \xrightarrow{p} 1$, infatti

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - 1/y^n & y > 1 \end{cases} \to \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

che è la funzione di ripartizione della degenere in 1. Ponendo, per ogni n, $X_n = X$, si ha ovviamente $X_n \xrightarrow{d} X$ e quindi, per l'indipendenza tra X_n e Y_n, la successione di v.a. doppie $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, 1)$. Siccome la funzione $g(x, y) = \frac{x}{x+y}$ è continua per $(x, y) \neq (0, 0)$ e la nostra variabile aleatoria doppia assume quasi certamente valori positivi, allora possiamo applicare il teorema della funzione continua e concludere che

$$Z_n = g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, 1) = \frac{X}{X + 1} = Z.$$

Troviamo la funzione di ripartizione limite. Chiaramente $Z > 0$ quasi certamente e, siccome il denominatore è maggiore del numeratore, si ha anche $Z < 1$ q.c.. Quindi sappiamo già che $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$ e che $F_Z(z) = 1$ per $z > 1$. Dobbiamo trovare la funzione di ripartizione solo per $z \in (0, 1)$:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\frac{X}{X+1} < z) = P(X < zX + z) = P(X < \frac{z}{1-z}) = F_X(\frac{z}{1-z})$$

per sostituire il valore in F_X bisogna vedere se $\frac{z}{1-z}$ è maggiore o minore di 1. Possiamo vedere facilmente che $\frac{z}{1-z} \leq 1$ se $z \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\frac{z}{1-z} > 1$ per $z \in (\frac{1}{2}, 1)$, quindi

$$F_Z(z) = F_X(\frac{z}{1-z}) = \begin{cases} 0 & z \in (0, \frac{1}{2}] \\ 1 - \frac{1-z}{z} & z \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & z \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{2z-1}{z} & z \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Esercizio 2: Si consideri la successione di v.a. indipendenti (ma non i.d.) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, ciascuna con densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{2} & -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Determinare, se esistono,

a) il limite in distribuzione ed in probabilità della successione $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) il limite in distribuzione di $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che

$$Y_n = n\left(X_n + \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2...$$

Soluzione: Ciascuna variabile aleatoria X_n assume quasi certamente valori in $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, quindi

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{n} \\ ?? & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & x > \frac{1}{n} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ?? & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

per cui la successione X_n converge in distribuzione alla degenere in 0 (non ci interessa cosa succede nel punto $x = 0$ perché è punto di salto per la funzione di ripartizione limite); di conseguenza $X_n \xrightarrow{p} 0$.

Per ogni n si ha $Y_n = nX_n + 1$, e quindi Y_n assume valori in $(0, 2)$. Per $y \in (0, 2)$ si ha

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(Y_n < y) = P(nX_n + 1 < y) = P(X_n < \frac{y-1}{n}) = F_{X_n}(\frac{y-1}{n}) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{y-1}{n}} \frac{n}{2}(x+1)\, dx \\ &= \frac{n}{2}\left(\frac{(y-1)^2}{2n^2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{y-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n}(y^2 - 2y) + \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, per $n \to \infty$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{4n}(y^2 - 2y) + \frac{y}{2} & 0 < y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y}{2} & 0 < y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases} \quad \text{per cui } Y_n \xrightarrow{d} Y \sim U(0, 2).$$

Esercizio 3: Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti con $X_n \sim Unif(1, n)$. Si studi la convergenza di $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$Z_n = \frac{X_n}{n^2}, \qquad n = 1, 2...$$

Soluzione: Z_n assume quasi certamente valori nell'intervallo $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, quindi

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq \frac{1}{n^2} \\ ?? & z \in (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}] \\ 1 & z > \frac{1}{n} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ?? & z \in \emptyset \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

per cui Z_n converge in distribuzione alla degenere in 0 e $Z_n \xrightarrow{p} 0$.

Esercizio 4: Siano X_n e Y_n indipendenti per ogni n, la prima $Unif(0, n+1)$ e la seconda $Exp\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Trovare il lim in distribuzione di $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$Z_n = \frac{Y_n}{X_n}, \qquad n = 1, 2...$$

Soluzione: La successione X_n NON converge in distribuzione (verificatelo controllando che $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}$ non può essere una funzione di ripartizione), quindi NON possiamo usare i risultati sulle convergenze su X_n e Y_n prese separatamente.

Dobbiamo quindi trovare la distribuzione di $Z_n = Y_n/X_n$. La densità congiunta di (X_n, Y_n) è il prodotto delle due marginali, quindi

$$f_{X_n,Y_n}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n-1} e^{-\frac{1}{n-1}y} & x \in (0, n+1), y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Z_n assume quasi certamente valori non negativi. Sappiamo allora che $F_{Z_n}(z) = 0$ per $z \leq 0$, mentre per $z > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(z) &= P(Z_n < z) = P(\frac{Y_n}{X_n} < z) = P(Y_n < zX_n) = \int_0^{n+1} \left[\int_0^{zx} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n-1} e^{-\frac{1}{n-1}y}\, dy \right] dx \\
&= \int_0^{n+1} \frac{1}{n+1} \left[1 - e^{-\frac{1}{n-1}zx} \right] dx = 1 - \frac{1}{n+1} \int_0^{n+1} e^{-\frac{z}{n-1}x} dx \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{z} \int_0^{n+1} \frac{z}{n-1} e^{-\frac{z}{n-1}x} dx = 1 - \frac{n-1}{z(n+1)} [1 - e^{-\frac{z}{n-1}(n+1)}]
\end{aligned}$$

Per $n \to \infty$ il rapporto $\frac{n-1}{n+1} \to 1$ e quindi si ha

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - \frac{n-1}{z(n+1)}[1 - e^{-\frac{z}{n-1}(n+1)}] & z > 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{z}[1 - e^{-z}] & z > 0 \end{cases} = F_Z(z).$$

Si può verificare che F_Z è una funzione di ripartizione, e quindi $Z_n \xrightarrow{d} Z$, dove Z ha funzione di ripartizione F_Z.

Esercizio 5: Sia X una v.a. discreta che assume i valori -1 e 1 con uguale probabilità. Si definisca

$$X_n = \begin{cases} |X| & \text{con prob. } 1 - \frac{1}{n} \\ e^n & \text{con prob. } \frac{1}{n} \end{cases}$$

a) X_n converge a $|X|$ in distribuzione?
b) X_n converge a $|X|$ in probabilità?
c) $E(|X| - X_n)^2$ converge a 0?
Suggerimento: notare che $|X| = 1$ quasi certamente.

Soluzione: Ricordando che $|X| = 1$ quasi certamente, la variabile aleatoria X_n assume valore 1 con probabilità $1 - \frac{1}{n}$ e e^n con probabilità $\frac{1}{n}$. Quindi

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 < x \leq e^n \\ 1 & x > e^n \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

che è la funzione di ripartizione della degenere in 1 e anche della variabile aleatoria $|X|$. Quindi X_n converge in probabilità e in distribuzione a $|X|$.

Per quanto riguarda il valore atteso $E(|X| - X_n)^2$, notiamo che

$$|X| - X_n = \begin{cases} 0 & \text{con prob } 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - e^n & \text{con prob } \frac{1}{n} \end{cases}$$

per cui

$$E(|X| - X_n)^2 = 0^2 \cdot (1 - \frac{1}{n}) + (1 - e^n)^2 \cdot \frac{1}{n} = (1 - e^n)^2 \cdot \frac{1}{n} \quad \to \quad +\infty.$$

Esercizio 6: Siano X e Y v.a. indipendenti e i.d. con legge $Exp(1)$.
a) Calcolare valor medio e varianza di

$$Z = Y - X$$

b) Studiare la convergenza della successione

$$\frac{(Z_1 + ... + Z_n)^2}{2n}$$

dove $Z_1, ..., Z_n$ sono indipendenti e i.d. con la stessa distribuzione di Z.

c) Qual'è la distribuzione di Z?

Soluzione: Sappiamo che in generale per una v.a. esponenziale $W \sim Exp(\lambda)$ si ha $EW^r = r!/\lambda^r$ Quindi, nel nostro caso per $\lambda = 1$, $E(X) = E(Y) = 1$ e $V(X) = V(Y) = 2 - 1 = 1$; per le proprietà dei valori attesi

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 1 - 1 = 0 \\ V(Z) &= V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y) \\ &= 1 + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

(per il calcolo della varianza abbiamo anche sfruttato l'indipendenza tra X e Y).

Le variabili aleatorie Z_i sono i.i.d., tutte con valore atteso $E(Z) = \mu = 0$ e varianza $V(Z) = \sigma^2 = 2$, quindi soddisfano le condizioni del teorema del limite centrale e si ha

$$V_n = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \xrightarrow{d} \quad V \sim N(0, 1).$$

Ma possiamo scrivere la successione V_n come

$$V_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$$

per cui la successione che ci interessa è V_n^2. Per il teorema della funzione continua si ha allora che

$$V_n^2 \xrightarrow{d} V^2$$

e siccome $V \sim N(0, 1)$, allora $V^2 \sim \chi^2_1$. Per concludere,

$$\frac{(Z_1 + \cdots + Z_n)^2}{2n} \quad \xrightarrow{d} V^2 \sim \chi^2_1.$$

Ora vediamo quale è la distribuzione di Z. Sappiamo che la densità congiunta di (X, Y) è

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Z può assumere quasiasi valore reale e, per un generico $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(Y - X < z) = P(Y < z + X).$$

Poichè si integra la densità congiunta nel I quadrante al di sotto della retta $Y = z + X$, bisogna distinguere due casi a seconda che $z < 0$ oppure $z \geq 0$, essendo diverso il grafico. Nel caso $z < 0$ si ha

$$\begin{aligned} P(Y < z + X) &= \int_{-z}^{+\infty} \left[\int_0^{z+x} e^{-x}e^{-y}\, dy\right] dx = \\ &= \int_{-z}^{+\infty} e^{-x} \left[\int_0^{z+x} e^{-y}\, dy\right] dx = \int_{-z}^{+\infty} e^{-x}\left[1 - e^{-(z+x)}\right] dx \\ &= \int_{-z}^{+\infty} e^{-x}\, dx - \int_{-z}^{+\infty} e^{-(z+2x)}\, dx = e^z - e^{-z}\int_{-z}^{+\infty} e^{-2x}\, dx \\ &= e^z - \frac{e^{-z}}{2}\int_{-z}^{+\infty} 2e^{-2x}\, dx = e^z - \frac{e^{-z}}{2} e^{-2(-z)} = \frac{e^z}{2}. \end{aligned}$$

Con calcoli simili si vede che per $z \geq 0$

$$P(Y < z + x) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{z+x} e^{-x} e^{-y}\, dy \right] dx = \cdots = 1 - \frac{e^{-z}}{2}$$

e quindi la densità di Z è

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{e^z}{2} & z < 0 \\ \frac{e^{-z}}{2} & z \geq 0 \end{cases} = \frac{e^{-|z|}}{2}.$$

Esercizio 7: Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. e $Unif(0,1)$. Si consideri la successione di v.a.

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

Studiare il limite di Y_n, tenendo presente la legge dei grandi numeri.

Soluzione: Possiamo scrivere

$$\log Y_n = \log \left(\prod_{j=1}^n X_j \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log X_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_j$$

avendo posto $W_j = \log X_j$. Le variabili aleatorie W_j sono i.i.d., se hanno anche valore atteso finito, possiamo applicare la legge dei grandi numeri.

$$E(W_j) = E(\log X_j) = \int_0^1 \log x \cdot f_{X_j}(x)\, dx = \int_0^1 \log x\, dx = [x \log x]_0^1 - 1 = -1$$

Applicando la legge dei grandi numeri otteniamo

$$\log Y_n \xrightarrow{p} -1$$

e quindi, siccome l'esponenziale è una funzione continua si ha

$$Y_n = e^{\log Y_n} \quad \xrightarrow{p} \quad e^{-1}.$$

Esercizio 8: Sia X una v.a esponenziale di parametro λ. Definiamo la successione di v.a.

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } X \geq n \\ X & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

i) ricavare, per ogni fissato n, la distribuzione di Y_n.
ii) studiare il limite in distribuzione.
iii) vale anche la convergenza in probabilità allo stesso limite? Motivare la risposta.

Soluzione:

i) per ogni fissato n, la v.a. $Y_n \in (0, +\infty)$ q.c. Quindi si ha

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

Per $y > 0$ si ha $F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) = 1 - P(Y_n \geq y)$ e

$$\begin{aligned} P(Y_n \geq y) &= P((Y_n \geq y) \cap \Omega) \\ &= P((Y_n \geq y) \cap (Y_n = 0)) + P((Y_n \geq y) \cap (Y_n = X)) \\ &= 0 + P(y \leq X < n) \\ &= F_X(n) - F_X(y) = 1 - e^{-\lambda n} - 1 + e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} + e^{-\lambda n} & y > 0 \end{cases} \underset{n\to\infty}{\to} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}.$$

ii) Possiamo concludere che $Y_n \xrightarrow{d} X \sim Exp(\lambda)$

iii) Per la convergenza in probabilità verifichiamo che vale la cond. nec. e suff., ovvero che, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left(|Y_n - X| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

Infatti si ha che

$$\begin{aligned} P\left(|Y_n - X| \geq \varepsilon\right) &= P(Y_n \neq X) = P(Y_n = 0) \\ &= P(X \geq n) = e^{-\lambda n} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Quindi $Y_n \xrightarrow{p} X \sim Exp(\lambda)$.

Esercizio 9: Data la successione $\{X_n\}_{n\geq 1}$ di v.a. discrete, indipendenti, che assumono valori -1 e 1 con uguale probabilità, per ogni n, sia

$$Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Studiare la convergenza di $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$, nei due casi $\alpha = 1$ e $\alpha = 1/2$.

Soluzione: Chiaramente per $\alpha = 1$ la successione Y_n coincide con la media campionaria delle X_i che sono i.i.d. Quindi valgono le ipotesi della LDGN e possiamo concludere che

$$Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{p} E(X) = 0$$

poichè, per ogni i,

$$X_i = \begin{cases} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Per $\alpha = 1/2$ invece è possibile applicare il TLC poichè

$$V(X_i) = E(X_i^2) = 1$$

quindi

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{X_1 + ... + X_n - 0}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

che coincide con la successione delle somme parziali standardizzate poichè $E(S_n) = n \cdot 0 = 0$ e $V(S_n) = nV(X_i) = n$. Poichè le v.a. sono i.i.d, posso concludere che

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1).$$