Esercitazione 8 - Soluzioni

---

1. Sia X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro 1 e sia, per ogni $n \in N$,
$$Y_n = \left|1 - \frac{X}{n}\right|^n .$$

   a) Trovare la funzione di ripartizione di Y_n.

   b) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$.
   [Ricorda: $\lim_{n\to\infty} \frac{y^{1/n}-1}{1/n} = \log y$].

   Soluzione:

   a) Per ogni $n \in N$ si ha $Y_n = \left|1 - \frac{X}{n}\right|^n \in [0, +\infty)$ q.c. e quindi $\forall y \leq 0$, $F_{Y_n}(y) = 0$.

   Per $y > 0$, abbiamo
$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= P(Y_n < y) \\
&= P\left(\left|1 - \frac{X}{n}\right|^n < y\right) \\
&= P\left(\left|1 - \frac{X}{n}\right| < y^{1/n}\right) \\
&= P\left(1 - y^{1/n} < \frac{X}{n} < 1 + y^{1/n}\right) \\
&= P\left(n(1 - y^{1/n}) < X < n(1 + y^{1/n})\right) \\
&= F_X(n(1 + y^{1/n})) - F_X(n(1 - y^{1/n})).
\end{aligned}$$

   Ora dobbiamo distinguere i due casi: $0 < y \leq 1$ e $y > 1$, poichè, nel secondo caso, si ha $1 - y^{1/n} < 0$ e quindi $F_X(n(1 - y^{1/n})) = 0$. Allora la f.r. è:
$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \exp\left\{-n(1 - y^{1/n})\right\} - \exp\left\{-n(1 + y^{1/n})\right\} & 0 < y \leq 1 \\ 1 - \exp\left\{n(1 + y^{1/n})\right\} & y > 1 \end{cases} .$$

   b) Per poter effettuare il limite riscriviamo la f.r. come segue:
$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \exp\left\{\frac{y^{1/n}-1}{1/n}\right\} - \exp\left\{-\frac{y^{1/n}+1}{1/n}\right\} & 0 < y \leq 1 \\ 1 - \exp\left\{-\frac{y^{1/n}+1}{1/n}\right\} & y > 1 \end{cases} .$$

Poichè $\lim_{n\to\infty} \frac{y^{1/n}-1}{1/n} = \log y$ mentre ovviamente $\lim_{n\to\infty} \frac{y^{1/n}+1}{1/n} = +\infty$, il limite della f.r. è

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y)$$
$$= \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ y, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases},$$

che coincide con la f.r. della v.a. Uniforme su $(0,1)$. Quindi $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Unif(0,1)$.

2. Siano $Y_n = X^n$ e $Z_n = X^{1/n}$ e sia X una v.a. uniforme su $[0,1]$. Trovare il limite in distribuzione di Y_n e Z_n.

   Soluzione: Innanzitutto notiamo che se fossero successioni numeriche si avrebbe, per $0 < x < 1$,

   $$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} x^{1/n} = 1.$$

   Per verificare la convergenza in distribuzione dobbiamo calcolare la f.r. e studiarne il limite:

   $$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(Y_n < y) \\ &= P(X^n < y) \\ &= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y^{1/n} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

   Notiamo che essa è continua $\forall y$ e che

   $$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y)$$
   $$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

   per cui si ha $Y_n \xrightarrow{d} Y \overset{q.c.}{=} 0$.

   Analogamente per la seconda successione si ha

   $$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n < z) \\ &= P(X^{1/n} < z) \\ &= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ z^n & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   (anch'essa continua $\forall z$) e

   $$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z)$$
   $$= \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases},$$

per cui si ha che $Z_n \xrightarrow{d} Z \overset{q.c.}{=} 1$.

3. Siano U_n e V_n successioni di v.a. indipendenti con distribuzioni di probabilità rispettivamente

$$\begin{aligned} P\{U_n < u\} &= u^n \qquad 0 < u \leq 1 \\ P\{V_n < v\} &= v^n \qquad 0 < v \leq 1 \end{aligned}$$

Trovare il limite in distribuzione della successione

$$Z_n = \frac{V_n}{U_n}.$$

Soluzione: Per ogni n, le v.a. $U_n, V_n \in (0,1]$ q.c. e quindi la v.a. $Z_n \in (0,+\infty)$ q.c. Ricaviamo ora la f.r.

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Z_n < z) \\ &= P(V_n < zU_n). \end{aligned}$$

Dobbiamo allora distinguere due casi: $0 < z \leq 1$ e $z > 1$, poichè si tratta di integrare sulla regione costituita dall'intersezione tra il quadrato $[0,1]^2$ e l'area sottostante alla retta $V_n = zU_n$. Nel primo caso essa corrisponde al triangolo sotto alla retta e quindi, per $0 < z \leq 1$, si ha

$$F_{Z_n}(z) = \int_0^1 \int_0^{zu} f_{U_n,V_n}(u,v)dvdu.$$

Per ottenere la funzione di densità congiunta sfruttiamo l'indipendenza delle v.a., $\forall n$, e deriviamo le due f.r. marginali:

$$f_{U_n,V_n}(u,v) = f_{U_n}(u)f_{V_n}(v) = n^2u^{n-1}v^{n-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \int_0^1 \int_0^{zu} f_{U_n,V_n}(u,v)dvdu \\ &= n^2 \int_0^1 u^{n-1} \int_0^{zu} v^{n-1}dvdu \\ &= n \int_0^1 u^{n-1} \left[v^n\right]_0^{zu} du \\ &= nz^n \int_0^1 u^{2n-1}du \\ &= \frac{z^n}{2}\left[u^{2n}\right]_0^1 = \frac{z^n}{2} \qquad 0 < z \leq 1. \end{aligned}$$

Per $z > 1$ conviene esprimere l'integrale come il complemento ad uno dell'integrale sul triangolo sopra la retta $V_n = zU_n$ (che in questo caso è al di sopra della bisettrice). Quindi

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= 1 - \int_0^1 dv \int_0^{v/z} f_{U_n,V_n}(u,v) du \\ &= 1 - n^2 \int_0^1 dv \int_0^{v/z} u^{n-1} v^{n-1} du \\ &= 1 - n \int_0^1 v^{n-1} \left[u^n\right]_0^{v/z} dv \\ &= 1 - \frac{n}{z^n} \int_0^1 v^{2n-1} dv \\ &= 1 - \frac{1}{2z^n} \qquad z > 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \frac{z^n}{2}, & 0 < z \le 1 \\ 1 - \frac{1}{2z^n}, & z > 1 \end{cases}$$

che è continua $\forall z$ e il limite è

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 1 \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

cosicchè si ha $Z_n \xrightarrow{d} Z \overset{q.c.}{=} 1$.

Notiamo che per la convergenza in distribuzione di Z_n non era possibile arrivare a delle conclusioni studiando il limite delle due successioni U_n e V_n separatamente, poichè ciò non ci permetteva di dire nulla sulla convergenza della successione di v.a. doppie (U_n, V_n). E' però possibile studiare la convergenza della successione (U_n, V_n) studiando il limite della f.r. congiunta $f_{U_n,V_n}(u,v)$ e poi applicare il teorema secondo il quale se una successione di v.a. (a una o più dimensioni) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ e g è una funzione continua, allora $g(Y_n) \xrightarrow{d} g(Y)$.

$$\begin{aligned} F_{U_n,V_n}(u,v) &= F_{U_n}(u) F_{V_n}(v) \\ &= u^n v^n \qquad 0 < u, v \le 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n,V_n}(u,v) = \begin{cases} 0 & u, v \le 1 \\ 1 & u, v > 1 \end{cases}$$

cosicchè si ha $(U_n, V_n) \xrightarrow{d} (1,1)$. Se consideriamo poi la funzione continua $z = g(u,v) = \frac{v}{u}$ si può affermare che $Z_n \xrightarrow{d} Z \overset{q.c.}{=} 1$.

4. Sia $X_n \sim N(b_n, \sigma_n^2)$ e supponiamo che $b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ e $\sigma_n^2 \overset{n\to\infty}{\to} \sigma^2$. Trovare il limite in distribuzione di X_n. (Suggerimento: si tenga presente che la

distribuzione di probabilità di una gaussiana è univocamente determinata da media e varianza)

Soluzione: La f.r della gaussiana è espressa come

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left\{-\frac{(z-b_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} dz \\ &\overset{n\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left\{-\frac{(z-b)^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dz \\ &= F_X(x). \end{aligned}$$

La funzione limite $F_X(x)$ è continua e coincide con la f.r. di $X \sim N(b, \sigma^2)$ e quindi si ha che $X_n \overset{d}{\to} X \sim N(b, \sigma^2)$.

5. Sia $Z_n \sim N(0, \sigma^2)$ una successione di v.a. indipendenti e sia, per $\alpha < 1$,

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_{n+1} &= \alpha X_n + Z_{n+1}. \end{aligned}$$

a) Qual'è la distribuzione di X_1? E quella di X_2? [Si ricorda che la combinazione lineare di v.a. gaussiane indipendenti è anch'essa gaussiana]

b) Esprimendo X_n con una formula ricorsiva, calcolare $Cov(X_n, X_{n-1})$ e $Cov(X_n, X_{n-m})$, $m > 1$. Le variabili della successione X_n sono indipendenti?

c) A cosa converge X_n in distribuzione?

Soluzione:

a) Notiamo che le v.a. $X_1, ..., X_n$ possono rappresentare le posizioni successive di un oggetto in movimento, che ad ogni istante si sposta dalla posizione attuale X_n a quella successiva αX_n, ma subisce anche una perturbazione di ampiezza aleatoria Z_{n+1} (distribuita come una normale).

Per ottenere la distribuzione di X_1 sfruttiamo il fatto che la combinazione lineare di v.a. gaussiane indipendenti è anch'essa gaussiana e che inoltre la distribuzione normale è univocamente determinata da media e varianza. Quindi scriviamo

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha X_0 + Z_1 \\ &= \alpha x + Z_1 \end{aligned}$$

con $x \in R$, cosicchè si ha che

$$EX_1 = \alpha x + EZ_1 = \alpha x$$

e

$$V(X_1) = V(Z_1) = \sigma^2.$$

Allora $X_1 \sim N(\alpha x, \sigma^2)$. Per X_2 si ha analogamente che

$$X_2 = \alpha X_1 + Z_2$$

e quindi

$$EX_2 = \alpha EX_1 + EZ_2 = \alpha^2 x + 0$$

e

$$V(X_2) = V(\alpha X_1) + V(Z_2) = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2.$$

Allora $X_2 \sim N(\alpha^2 x, \sigma^2(\alpha^2+1))$.

Per induzione possiamo allora mostare che

$$\begin{aligned} X_n &\sim N(\alpha^n x, \sigma^2(1+\alpha^2+...+\alpha^{2(n-1)})) \\ &= N\left(\alpha^n x, \sigma^2\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

Infatti per $n = 1$ abbiamo dimostrato che ciò è vero. Dobbiamo verificare che se è vero per n è vero per $n+1$. Poichè

$$X_{n+1} = \alpha X_n + Z_{n+1}$$

si ha

$$EX_{n+1} = \alpha EX_n + EZ_{n+1} = \alpha^{n+1}x$$

e

$$\begin{aligned} V(X_{n+1}) &= V(\alpha X_n) + V(Z_{n+1}) \\ &= \alpha^2\sigma^2(1+\alpha^2+...+\alpha^{2(n-1)}) + \sigma^2 \\ &= \sigma^2(1+\alpha^2+...+\alpha^{2n}) \\ &= \sigma^2\frac{1-\alpha^{2(n+1)}}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

Quindi $X_{n+1} \sim N\left(\alpha^{n+1}x, \sigma^2\frac{1-\alpha^{2(n+1)}}{1-\alpha^2}\right)$.

b) Per calcolare $Cov(X_n, X_{n-1})$ e $Cov(X_n, X_{n-m})$, $m > 1$ esprimiamo X_n con la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{aligned} X_n &= Z_n + \alpha X_{n-1} \\ &= Z_n + \alpha(Z_{n-1} + \alpha X_{n-2}) \\ &= Z_n + \alpha Z_{n-1} + \alpha^2 X_{n-2} \\ &= ... \\ &= Z_n + \alpha Z_{n-1} + \alpha^2 Z_{n-2} + ... + \alpha^{n-1}Z_1 + \alpha^n x \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i Z_{n-i} + \alpha^n x = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha^i Z_{n-i} + EX_n \end{aligned}$$

Allora

$$
\begin{aligned}
Cov(X_n, X_{n-1}) &= E\left[(X_n - EX_n)(X_{n-1} - EX_{n-1})\right] \\
&= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i Z_{n-i} \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^j Z_{n-1-j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^i \alpha^j E(Z_{n-i} Z_{n-1-j}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \alpha^{2j+1} \sigma^2 \\
&= \alpha \sigma^2 \frac{1 - \alpha^{2(n-1)}}{1 - \alpha^2}
\end{aligned}
$$

poichè l'ultimo v.m. è nullo (per l'indipendenza) sempre tranne che per $i = j + 1$ e in questo caso è pari a σ^2.

Per ottenere invece $Cov(X_n, X_{n-m})$, $m > 1$, calcoliamo

$$
\begin{aligned}
Cov(X_n, X_{n-m}) &= E\left[(X_n - EX_n)(X_{n-m} - EX_{n-m})\right] \\
&= E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i Z_{n-i} \cdot \sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^j Z_{n-m-j}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^i \alpha^j E(Z_{n-i} Z_{n-m-j}) \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^{2j+m} \sigma^2 \\
&= \alpha^m \sigma^2 \frac{1 - \alpha^{2(n-m)}}{1 - \alpha^2}.
\end{aligned}
$$

poichè l'ultimo v.m. è nullo sempre tranne che per $i = j + m$.

Si noti che, per $m = 1$, dalla precedente formula si ottiene la $Cov(X_n, X_{n-1})$ mentre, per $m = 0$, si riottiene la varianza calcolata al punto a), ovvero $V(X_n) = \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}$

c) Per studiare la convergenza di X_n ricordiamo che $X_n \sim N\left(\alpha^n x, \sigma^2 \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right)$ e che si tratta di studiare il limite di v.m. e varianza (vedi esercizio n.4). Infatti $X_n \sim N(a_n, b_n)$ converge in distribuzione a una normale $X \sim N\left(\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n\right)$. Quindi

$$
X_n \xrightarrow{d} X \sim N\left(x, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right).
$$

6. Sia $X_n \sim Geom(p_n)$ con $p_n = \lambda/n$, a cosa converge in distribuzione $Y_n = \frac{1}{n}X_n$?

Soluzione: Calcoliamo la f.r. di Y_n, considerando che Y_n è quasi certamente positivo: per $y > 0$

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= P(X_n < ny) \\
&= P(X_n \leq \lfloor ny \rfloor) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor ny \rfloor} \frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor ny \rfloor -1} \frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{l} \\
&= \frac{\lambda}{n}\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor ny \rfloor}}{\frac{\lambda}{n}} \\
&= 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor ny \rfloor}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor ny \rfloor} & y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{\lambda y}{ny}\right)^{\lfloor ny \rfloor} & y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{\lambda y}{ny}\right)^{ny-a} & y > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

dove $a = ny - \lfloor ny \rfloor$ e

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1-e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}.$$

Perciò abbiamo dimostrato che $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim Exp(\lambda)$.