Esercitazione 8

---

1. Sia X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro 1 e sia, per ogni $n \in N$,
$$Y_n = \left|1 - \frac{X}{n}\right|^n .$$
a) Trovare la funzione di ripartizione di Y_n.

b) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$. [Ricorda: $\lim_{n\to\infty} \frac{y^{1/n}-1}{1/n} = \log y$].

2. Siano $Y_n = X^n$ e $Z_n = X^{1/n}$ e sia X una v.a. uniforme su $[0,1]$. Trovare il limite in distribuzione di Y_n e Z_n.

3. Siano U_n e V_n successioni di v.a. indipendenti con distribuzioni di probabilità rispettivamente
$$\begin{array}{rcll} P\{U_n < u\} & = & u^n & 0 < u \leq 1 \\ P\{V_n < v\} & = & v^n & 0 < v \leq 1 \end{array}$$
Trovare il limite in distribuzione della successione
$$Z_n = \frac{V_n}{U_n}.$$

4. Sia $X_n \sim N(b_n, \sigma_n^2)$ e supponiamo che $b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ e $\sigma_n^2 \overset{n\to\infty}{\to} \sigma^2$. Trovare il limite in distribuzione di X_n. (Suggerimento: si tenga presente che la distribuzione di probabilità di una gaussiana è univocamente determinata da media e varianza)

5. Sia $Z_n \sim N(0, \sigma^2)$ una successione di v.a. indipendenti e sia, per $\alpha < 1$,
$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & x \\ X_{n+1} & = & \alpha X_n + Z_n. \end{array}$$
a) Qual'è la distribuzione di X_1? E quella di X_2? [Si ricorda che la combinazione lineare di v.a. gaussiane indipendenti è anch'essa gaussiana]

b) Esprimendo X_n con una formula ricorsiva, calcolare $Cov(X_n, X_{n-1})$ e $Cov(X_n, X_{n-m})$, $m > 1$. Le variabili della successione X_n sono indipendenti?

c) A cosa converge X_n in distribuzione?

6. Sia $X_n \sim Geom(p_n)$ con $p_n = \lambda/n$, a cosa converge in distribuzione $Y_n = \frac{1}{n} X_n$?