ESERCITAZIONE 7 SOLUZIONI

Esercizio 1 (*n. 6.42 del Ross*) La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Si determini la densità condizionata di X dato $Y=y$ e di Y dato $X=x$.

b) Si determini la densità di $Z = XY$.

Soluzione:

a) La densità condizionata di X dato $Y=y$ si ottiene come rapporto della densità congiunta e della densità marginale della Y: è necessario dunque calcolare prima quest'ultima come segue

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dx \\ &= [\text{ponendo } z = x(y+1)] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{z}{y+1}\frac{1}{y+1}e^{-z}dz \\ &= \frac{1}{(y+1)^2}\Gamma(2) = \frac{1}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

per $y>0$. Quindi si ha

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2} & y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e

$$f_{X|Y}(x|Y=y) = \begin{cases} (y+1)^2 xe^{-x(y+1)} & x>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $y>0$.

Allo stesso modo ricaviamo la densità marginale della v.a. X (per $x>0$)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= xe^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy \\ &= xe^{-x}\left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_0^{+\infty} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

e quindi

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Dividendo la densità congiunta per l'espressione appena ottenuta si ottiene la densità condizionata di Y dato $X=x$:

$$f_{Y|X}(y|X=x) = \begin{cases} xe^{-xy} & y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $x > 0$.

b) Per ottenere la densità di $Z = XY$ consideriamo innanzitutto che $X, Y \in [0, +\infty)$ q.c. e quindi $Z \in [0, +\infty)$ q.c.

La f.r., per $z > 0$, è

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) \\ &= P(XY < z) \\ &= P\left(Y < \frac{z}{X}\right). \end{aligned}$$

Si tratta di integrare la densità congiunta sulla regione del I quadrante che si trova al di sotto dell'iperbole $xy = z$ (per $z > 0$). Quindi si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{z/x} xe^{-x(y+1)} dy \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx \int_0^{z/x} e^{-xy} dy \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x} \left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_0^{z/x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x}(1 - e^{-z}) dx \\ &= 1 - e^{-z}. \end{aligned}$$

Quindi la f.r. è

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - e^{-z} & z > 0 \end{cases}$$

che corrisponde alla f.r. della $Exp(1)$.

Esercizio 2 Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro p. Calcolare la distribuzione della v.a. $Z = \max(X, Y) - X$.

Soluzione: iniziamo col considerare che X, Y hanno entrambe come spettro l'insieme $\{1, 2, ...\}$ mentre lo spettro della nuova v.a. è $\{0, 1, ...\}$. Calcoliamo la sua distribuzione di probabilità (come sempre nel caso di v.a. discrete non conviene lavorare con la f.r.): per $k = 0, 1, ...$ si ha

$$\begin{aligned} P(Z &= k) = P(\max(X, Y) - X = k) \\ &= P\{(\max(X, Y) - X = k) \cap \Omega\} \\ &= P\{(\max(X, Y) - X = k) \cap (X \geq Y)\} + \\ &\quad + P\{(\max(X, Y) - X = k) \cap (X < Y)\}. \end{aligned}$$

Notiamo che, trattandosi di v.a. discrete, è importante prestare attenzione al fatto che le diseguaglianze siano o meno strette. Quindi si ha

$$\begin{aligned} P(Z &= k) = P\{X - X = k, X \geq Y\} + \\ &\quad + P\{Y - X = k, X < Y\}. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora distinguere i due casi $k = 0$ e $k > 0$ (poichè nel primo caso si ha solo il primo termine, mentre nel secondo caso si ha solo il secondo termine).

Per $k = 0$ (ricordando che $q = 1 - p$)

$$\begin{aligned}
P(Z &= 0) = P\{X \geq Y\} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty} P\{X = j, Y = r\} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty} p^2 q^{j-1} q^{r-1} \\
&= p^2 \sum_{r=1}^{\infty} q^{2r-2} \sum_{j=r}^{\infty} q^{j-r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\text{ponendo } j - r = l] \\
&= p^2 \sum_{r=1}^{\infty} q^{2r-2} \sum_{l=0}^{\infty} q^l \\
&= p^2 \sum_{r=1}^{\infty} q^{2r-2} \frac{1}{1-q} \\
&= p \sum_{r=1}^{\infty} q^{2(r-1)} = p \sum_{s=0}^{\infty} q^{2s} \\
&= p \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.
\end{aligned}$$

Per $k = 1, 2, ...$ si ha invece

$$\begin{aligned}
P(Z &= k) = P\{Y - X = k, X < Y\} \\
&= P\{Y - X = k\} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} P\{Y - X = k, X = r\} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} P(Y = r + k) P(X = r) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} p^2 q^{r+k-1} q^{r-1} \\
&= p^2 q^k \sum_{r=1}^{\infty} q^{2r-2} = p^2 q^k \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{pq^k}{1+q}.
\end{aligned}$$

Verifichiamo che si tratta di una distribuzione di probabilità ben definita (ovviamente entrambe le espressioni sono non negative): infatti

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{pq^k}{1+q} \\
= & \frac{1}{1+q}+\frac{pq}{1+q}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1} \\
= & \frac{1}{1+q}+\frac{pq}{1+q}\frac{1}{1-q} \\
= & \frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q}=1.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 L'urna U contiene una proporzione p di palline bianche. Se indichiamo con B il numero di palline bianche estratte in n estrazioni con reimbussolamento da U, si calcolino media e varianza di B.(Si può adottare il metodo diretto o sfruttare il fatto che la Binomiale di parametri n e p è una somma di n v.a. indipendenti e bernoulliane di parametro p).

Soluzione: Abbiamo già visto a lezione che per $B \sim Bin(n,p)$ si ha $E(B) = np$. Infatti se calcoliamo il v.m. con il metodo diretto abbiamo

$$\begin{aligned}
E(B) &= \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!}p^{j-1+1}(1-p)^{n-1-(j-1)} \\
&= np\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!}p^{j-1}(1-p)^{n-1-(j-1)} \\
&= [\text{ponendo } j-1=l] \\
&= np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!}p^l(1-p)^{n-1-l} \\
&= np
\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio si è applicato il teorema binomiale, per il quale si ha che

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!m-l!}p^l(1-p)^{m-l} \\
= & \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}p^l(1-p)^{m-l}=(p+(1-p))^m=1.
\end{aligned}$$

Altrimenti potevamo considerare che $B = X_1 + ... + X_n$ dove le v.a. X_j sono indipendenti e distribuite come v.a. $Bernoulli(p)$ per ogni $j = 1, ..., n$. Quindi

$$\begin{aligned} E(B) &= E(X_1 + ... + X_n) \\ &= E(X_1) + ... + E(X_n) = np, \end{aligned}$$

ricordando che per $X_j \sim Bern(p)$ si ha $E(X_j) = p$, per ogni j.

Per la varianza possiamo utilizzare il metodo diretto e il fatto che

$$V(B) = E(B^2) + (EB)^2.$$

Quindi cominciamo a calcolare il momento secondo della Bin.

$$\begin{aligned} E(B^2) &= \sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= np \sum_{j=1}^{n} j \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} p^{j-1} (1-p)^{n-j} \\ &= np \sum_{j=1}^{n} j \binom{n-1}{j-1} p^{j-1} (1-p)^{n-j} \\ &= [\text{ponendo } j-1 = l] \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-l-1} \\ &= np \sum_{l=0}^{n-1} l \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-l-1} + \\ &\quad + np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{n-l-1} \\ &= np\left[(n-1)p + 1\right], \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio si è riconosciuto nel primo termine il v.m. di una $Bin(n-1, p)$ e nel secondo termine la somma delle probabilità di una $Bin(n-1, p)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} V(B) &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che la binomiale è la somma di n bernoulliane indipendenti potevamo ricavare la varianza come segue

$$\begin{aligned} V(B) &= V(X_1 + ... + X_n) \\ &= V(X_1) + ... + V(X_n). \end{aligned}$$

Per $X_j \sim Bern(p)$ la varianza è pari a

$$\begin{aligned} V(X_j) &= E(X_j^2) - (EX_j)^2 \\ &= \left[0(1-p) + 1^2 p\right] - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

e quindi si ha

$$V(B) = np(1-p).$$

Esercizio 4 Supponiamo di avere due urne U_1 e U_2, con proporzione di palline bianche rispettivamente pari a p_1 e p_2, e di estrarre da esse (con reimbussolamento) rispettivamente k_1 e k_2 palline. Tutte le palline estratte vengono poi sistemate in una terza urna U_3.

Se definiamo con X la proporzione di palline bianche nell'urna U_3, calcolare $E(X)$ e $V(X)$.

Soluzione: Indichiamo con B_i il numero di palline bianche estratte dall'urna U_i, per $i = 1, 2$, allora si ha che

$$B_i \sim Bin(k_i, p_i)$$

e che, per il meccanismo di estrazione dalle urne, le v.a. B_1 e B_2 sono indipendenti.

Chiaramente, per quanto visto nell'esercizio n.4,

$$E(B_i) = k_i p_i, \qquad V(B_i) = k_i p_i (1-p_i).$$

La proporzione di palline bianche nell'urna U_3 è

$$X = \frac{B_1 + B_2}{k_1 + k_2}$$

per cui, per la linearità del valore atteso,

$$E(X) = \frac{E(B_1) + E(B_2)}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2}{k_1 + k_2}.$$

Per la varianza, grazie all'indipendenza tra B_1 e B_2 si ha

$$\begin{aligned} V(X) &= V\left(\frac{B_1 + B_2}{k_1 + k_2}\right) \\ &= \frac{V(B_1) + V(B_2)}{(k_1 + k_2)^2} \\ &= \frac{k_1 p_1 (1-p_1) + k_2 p_2 (1-p_2)}{(k_1 + k_2)^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro p.

a) Calcolare $P(X < 2Y)$.

b) Calcolare la distribuzione di $Z = X + Y$.

c) Calcolare $P(X = x|Z = z) = P(X = x|X + Y = z)$. E' vero o falso che la distribuzione di X condizionata all'evento $(X + Y = z)$ è l'uniforme discreta sull'insieme $\{1, 2, ..., z-1\}$.

d) Calcolare $E(X+2Y)$ e $V(X+2Y)$, tenendo conto che per una v.a. $X \sim Geom(p)$ si ha $EX = 1/p$ e $V(X) = q/p^2$.

Soluzione:

a) Poichè $X, Y \sim Geom(p)$ gli spettri delle due v.a. sono $S_X = S_y = \{1, 2, ...\}$ e quindi (intersecando con l'evento certo e sfruttando l'indipendenza delle due variabili) si ha

$$\begin{aligned}
P(X &< 2Y) = P\left[(X < 2Y) \cap \Omega\right] \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} P\left(X < 2Y, Y = y\right) \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} P\left(X < 2y\right) P(Y = y) \\
&= \sum_{y=1}^{\infty} pq^{y-1} \sum_{x=1}^{2y-1} pq^{x-1} \\
&= [\text{ponendo } l = x-1] \\
&= p^2 \sum_{y=1}^{\infty} q^{y-1} \sum_{l=0}^{2y-2} q^l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^2 \sum_{y=1}^{\infty} q^{y-1} \frac{1-q^{2y-1}}{1-q} \\
&= p\left[\sum_{y=1}^{\infty} q^{y-1} - \sum_{y=1}^{\infty} q^{3y-2}\right] \\
&= 1 - pq \sum_{y=1}^{\infty} q^{3(y-1)} \\
&= 1 - pq \frac{1}{1-q^3} \\
&= 1 - \frac{pq}{(1-q)(1+q+q^2)} \\
&= 1 - \frac{q}{1+q+q^2}.
\end{aligned}$$

b) Calcoliamo la distribuzione di $Z = X + Y$, dopo aver considerato che $S_z = \{2, 3, ...\}$, usando la formula di convoluzione per v.a. discrete indipendenti, ovvero

$$P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X = x) P(Y = z - x).$$

Poichè $x, y \in \{1, 2, ...\}$ q.c., si ha, per $z = 2, ...$,

$$\begin{aligned}
P(Z &= z) = \sum_{x=1}^{z} P(X = x) P(Y = z - x) \\
&= \sum_{x=1}^{z} pq^{x-1} pq^{z-x-1} \\
&= p^2 \sum_{x=1}^{z} q^{z-2} = p^2 q^{z-2}(z-1).
\end{aligned}$$

La distribuzione di Z è detta Binomiale Negativa di parametri 2 e p.

Tale risultato può essere spiegato nel modo seguente: la v.a. Binomiale Negativa è definita come il "tempo di attesa del k-esimo successo" nello schema di estrazione dall'urna bernoulliano. Nelle lezioni sulle estrazioni da un'urna, avevamo calcolato che, se definiamo con T_k il numero di prove necessarie per ottenere il k-esimo successo (quando le prove sono indipendenti), si ha

$$\begin{aligned}
P(T_k &= n) \\
&= P\left((k-1) \text{ succ.in } (n-1) \text{ prove} \cap (\text{succ. all'}n\text{-esima prova})\right) \\
&= \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k},
\end{aligned}$$

per $n \in (k, k+1, ...)$. Quindi $T_k \sim BinNeg\,(k, p)$. Nel nostro caso si ha $k = 2$ e perciò la v.a. Z rappresenta il tempo di attesa del secondo successo in uno schema di estrazioni bernoulliane; ciò concorda con il fatto che $Z = X + Y$ (con X e Y indipendenti tra loro) e che X, Y rappresentano ciascuna il tempo di attesa del primo successo sempre in uno schema bernoulliano.

c) Calcolariamo $P(X = x|Z = z)$, tenendo conto che $z \in \{2, 3, ...\}$ e $x \in \{1, 2, ..\}$

$$\begin{aligned}
P(X &= x|Z = z) = P(X = x|X + Y = z) \\
&= \frac{P(X = x, X + Y = z)}{P(X + Y = z)} \\
&= \frac{P(X = x)P(Y = z - x)}{P(Z = z)} \\
&= \frac{pq^{x-1} pq^{z-x-1}}{p^2 q^{z-2}(z-1)} = \frac{1}{z-1}
\end{aligned}$$

e quindi è vero che la distribuzione di X condizionata all'evento $(X + Y = z)$ è l'uniforme discreta sull'insieme $\{1, 2, ..., z-1\}$. Intuitivamente ciò si può spiegare considerando che, se si condiziona sul fatto che il tempo di attesa del secondo successo (ovvero la v.a. Z) sia pari ad un certo valore z, allora il tempo di attesa del primo successo (ovvero la v.a. X) potrà assumere, con uguale probabilità tutti i possibili valori da 1 a $z - 1$.

d) Poichè per una v.a. $X \sim Geom(p)$ si ha $EX = 1/p$ e $V(X) = q/p^2$, allora

$$\begin{aligned} E(X+2Y) &= E(X)+2E(Y) \\ &= \frac{3}{p} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V(X+2Y) &= V(X)+4V(Y) \\ &= \frac{q+4q}{p^2} = \frac{5q}{p^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6 Sia $U \sim Exp(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$, definiamo una nuova v.a. come $X = U^{1/\alpha}$.

a) Determinare la distribuzione di X con i due metodi conosciuti. (Nota: poichè $U > 0$ q.c., si può utilizzare il Teorema poichè sull'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è invertibile).

b) Calcolare i momenti $E(X^r)$ della X, per $r \geq 1$.

Soluzione:

a) Definiamo la trasformazione, invertibile su $[0, +\infty)$, $x = g(u) = u^{1/\alpha}$. Quindi si ha $u = h(x) = x^\alpha$. Applicando il Teorema, otteniamo la densità della nuova variabile, che ha come supporto anch'essa $[0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_U(h(x))|h'(x)| \\ &= \lambda e^{-\lambda x^\alpha} \alpha x^{\alpha-1} \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Tale distribuzione l'avevamo già incontrata nell'esercitazione 5 (esercizio n.4) ed è chiamata Weibull di parametri λ e α.

In alternativa potevamo ricavare la f.r. della X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(U^{1/\alpha} < x) \\ &= P(U < x^\alpha) \\ &= \int_0^{x^\alpha} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} \right]_0^{x^\alpha} \\ &= 1 - e^{-\lambda x^\alpha} \qquad x > 0, \end{aligned}$$

per cui la f.r. è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^\alpha} & x > 0 \end{cases}.$$

Come si vede essa coincide con la f.r. della Weibull (vedi eserc.5).

b) Per calcolare i momenti di ordine r della X cominciamo dal caso più semplice $r = 1$.

$$\begin{aligned}
EX &= \lambda\alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x^\alpha} x^{\alpha-1} dx \\
&= [\text{ponendo } \lambda x^\alpha = y] \\
&= \lambda\alpha \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y}{\lambda\alpha} \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{\alpha}+1-1} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right).
\end{aligned}$$

Notiamo che questo risultato coincide con quello ottenuto nell'esercitazione 5 (eserc.n.6), in cui avevamo calcolato il v.m. di una Weibull$(\lambda, \frac{1}{\beta})$: se poniamo $\alpha = \frac{1}{\beta}$ otteniamo infatti $\lambda^{-\beta}\Gamma(\beta+1)$.

Per $r > 1$ ripetiamo lo stesso ragionamento

$$\begin{aligned}
E(X^r) &= \lambda\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^\alpha} x^{r+\alpha-1} dx \\
&= \lambda\alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^\alpha} (x^\alpha)^{\frac{r+\alpha-1}{\alpha}} dx \\
&= [\text{ponendo } \lambda x^\alpha = y] \\
&= \lambda\alpha \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{r+\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^{r/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{r}{\alpha}} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^{r/\alpha}} \Gamma\left(\frac{r}{\alpha}+1\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 7 Sia $X \sim Unif(0,1)$. Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a. definita come segue

$$Y = \begin{cases} \sqrt{2X} & 0 < X < \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2-2X} & \frac{1}{2} \leq X < 1 \end{cases},$$

usando i due metodi conosciuti. (Nota: anche in questo caso, poichè la v.a. X è q.c. positiva, si può usare il Teorema per ricavare la densità della trasformazione nei due intervalli).

Soluzione:

Innanzitutto notiamo che la v.a. $Y \in (0,2)$ q.c., ma dobbiamo distinguere tra i due intervalli

$$\begin{aligned}
0 &< y < 1 \qquad \text{per } 0 < x < \frac{1}{2} \\
1 &\leq y < 2 \qquad \text{per } \frac{1}{2} \leq x < 1.
\end{aligned}$$

Definiamo ora due trasformazioni diverse nei due intervalli, separatamente: per $0 < x < \frac{1}{2}$ e $0 < y < 1$, si ha

$$y = g(x) = \sqrt{2x}$$

con inversa $x = h(y) = \frac{y^2}{2}$ e $h'(y) = y$. Quindi la densità della v.a. Y è:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y^2}{2}\right) y \\ &= 1_{(0,1)}\left(\frac{y^2}{2}\right) y \\ &= 1_{(0,1)}(y)\, y. \end{aligned}$$

Per $\frac{1}{2} \leq x < 1$ e $1 \leq y < 2$, si ha

$$y = g(x) = 2 - \sqrt{2 - 2x}$$

con inversa $x = h(y) = 1 - \frac{(2-y)^2}{2}$ e $h'(y) = 2 - y > 0$.Quindi la densità della v.a. Y su questo intervallo è:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(1 - \frac{(2-y)^2}{2}\right)(2-y) \\ &= 1_{(0,1)}\left(1 - \frac{(2-y)^2}{2}\right)(2-y) \\ &= 1_{(1,2)}(y)\,(2-y). \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 < y < 1 \\ 2 - y & 1 \leq y < 2 \end{cases}$$

che è detta triangolare sull'intervallo $(0, 2)$

In alternativa possiamo ricavare la distribuzione di probabilità, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} P(Y &< y) \\ &= P\left\{(Y < y) \cap \left[\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right)\right]\right\} \\ &= P\left\{\sqrt{2X} < y, 0 < X < \frac{1}{2}\right\} + \\ &\quad +P\left\{2 - \sqrt{2-2X} < y, \frac{1}{2} \leq X < 1\right\}. \end{aligned}$$

Distinguiamo i due casi: per $0 < y < 1$ il secondo termine è nullo, poichè per $\frac{1}{2} \leq x < 1$ si ha $1 < 2 - \sqrt{2-2X} < 2$ e quindi non può essere $2 - \sqrt{2-2x} <$

$y < 1$. Perciò, in questo caso, si ha

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) \\ &= P\left\{X < \frac{y^2}{2}, 0 < X < \frac{1}{2}\right\} \\ &= \int_0^{y^2/2} 1_{(0,1)}(x)dx = \frac{y^2}{2} \qquad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Nel secondo caso ($1 \leq y < 2$) entrambi i termini sono diversi da zero, ma per $0 < X < \frac{1}{2}$ si ha $0 < \sqrt{2X} < 1$ e quindi

$$\left\{0 < X < \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{\sqrt{2X} < y\right\}$$

poichè $1 \leq y < 2$. Quindi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) \\ &= P\left\{0 < X < \frac{1}{2}\right\} + \\ &\quad +P\left\{2 - \sqrt{2 - 2X} < y, \frac{1}{2} \leq X < 1\right\} \\ &= \frac{1}{2} + P\left\{1 - \frac{(2-y)^2}{2} > X, \frac{1}{2} \leq X < 1\right\} \\ &= \frac{1}{2} + P\left\{\frac{1}{2} \leq X < 1 - \frac{(2-y)^2}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1-\frac{(2-y)^2}{2}} 1_{(0,1)}(x)dx \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{(2-y)^2}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2-(2-y)^2}{2} \qquad 1 \leq y < 2. \end{aligned}$$

Perciò la f.r. è

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{y^2}{2} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{2-(2-y)^2}{2} & 1 < y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

che, derivata rispetto a y, ci ridà la funzione di densità triangolare.

Esercizio 8 Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe esponenziali di parametro λ. Si calcoli

$$P(X > Y)$$

e si dia un'interpretazione intuitiva del risultato.

Soluzione:

La probabilità richiesta si calcola integrando la densità congiunta (ottenuta facendo il prodotto delle marginali, poichè le due v.a. sono indipendenti)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{-\lambda x} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

sulla regione del I quadrante al di sotto della bisettrice.

Quindi si dovrà calcolare

$$\begin{aligned} P(X &> Y) = \int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} \left[-e^{-\lambda x}\right]_y^{+\infty} dy \\ &= \frac{2\lambda}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda y} dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A tale risultato si poteva giungere intuitivamente considerando che la distribuzione delle variabili è assolutamente continua ed è simmetrica rispetto alle due componenti: quindi si ha

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(X > Y) + P(Y \leq X) \\ &= 2P(X > Y). \end{aligned}$$

Esercizio 9 Sia (U, V) una v.a. doppia con densità congiunta pari a

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} v\lambda^2 e^{-\lambda v} & v > 0,\ 0 < u < 1 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases} .$$

Quanto vale in questo caso la $P(U > V)$?

Soluzione:

In questo caso la regione su cui integrare è data dall'intersezione tra il supporto della v.a. congiunta costituito da $(0, +\infty) \times (0, 1)$ con il semipiano al di sopra della bisettrice $U = V$.

$$\begin{aligned} P(U &> V) = \qquad (1) \\ &= \int_0^1 dv \int_v^1 v\lambda^2 e^{-\lambda v} du \\ &= \lambda^2 \int_0^1 (1-v) v e^{-\lambda v} dv \\ &= \lambda^2 \int_0^1 v e^{-\lambda v} dv - \lambda^2 \int_0^1 v^2 e^{-\lambda v} dv \end{aligned}$$

Calcoliamo, per parti, il I integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^1 ve^{-\lambda v}dv &= \left[-\frac{e^{-\lambda v}v}{\lambda}\right]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 e^{-\lambda v}dv \qquad (2)\\ &= \frac{1}{\lambda^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\end{aligned}$$

e, allo stesso modo, il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^2e^{-\lambda v}dv &= \left[-\frac{e^{-\lambda v}v^2}{\lambda}\right]_0^1 + \frac{2}{\lambda}\int_0^1 ve^{-\lambda v}dv \qquad (3)\\ &= \frac{2}{\lambda^3} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right).\end{aligned}$$

Sostituendoli nella (1) si ottiene

$$\begin{aligned}P(U &> V)\\ &= \lambda^2\left[\frac{1}{\lambda^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{2}{\lambda^3} + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\\ &= 1 + e^{-\lambda} - \frac{2}{\lambda}(1-e^{-\lambda}).\end{aligned}$$

Come verifica del risultato possiamo calcolare la probabilità $P(U \leq V)$ e verificare che la loro somma sia pari ad 1. In questo caso la densità congiunta non è simmetrica rispetto alle due componenti e quindi la probabilità calcolata è diversa da $1/2$.

Per calcolare la $P(U \leq V)$ è necessario spezzare l'integrale nei due seguenti

$$\begin{aligned}P(U &\leq V)\\ &= \int_0^1 dv\int_0^v v\lambda^2e^{-\lambda v}du +\\ &\quad + \int_1^{+\infty} dv\int_0^1 v\lambda^2e^{-\lambda v}du.\end{aligned}$$

Iniziamo a calcolare

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dv\int_0^v v\lambda^2e^{-\lambda v}du \qquad (4)\\ =\ &\int_0^1 v^2\lambda^2e^{-\lambda v}dv\\ =\ &\frac{2}{\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

poichè esso coincide con la (3) moltiplicata per il fattore λ^2. Il secondo integrale lo otteniamo come segue:

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} dv \int_0^1 v\lambda^2 e^{-\lambda v} du \qquad (5) \\ = \ & \lambda^2 \int_1^{+\infty} v\lambda^2 e^{-\lambda v} dv \\ = \ & \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Sommando (4) e (5) si ottiene

$$\begin{aligned} P(U \ & \leq \ V) \\ & = \ \frac{2}{\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \end{aligned}$$

e si può verificare che

$$P(U \leq V) + P(U > V) = 1$$

Esercizio 10 Sia (X, Y) una v.a. doppia con densità congiunta pari a

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Ricavare la distribuzione di $Z = \frac{Y}{X}$.
Soluzione:

Per le variabili X e Y si ha che $X, Y \in (0, 1)$ q.c.. Quindi la nuova v.a. $Z \in (0, +\infty)$ q.c.

Per ricavare la sua distribuzione, usiamo il metodo della f.r., per la quale possiamo cominciare a scrivere

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & z > 0 \end{cases} .$$

In realtà sarà necessario suddividere l'intervallo $(0, +\infty)$ nei due intervalli $(0, 1]$ e $(1, +\infty)$, ovvero considerare separatamente i due casi $0 < z \leq 1$ e $z > 1$. Ciò si deduce dall'analisi del grafico poichè si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) \ & = \ P(Z < z) = P\left(\frac{Y}{X} < z\right) \\ & = \ P(Y < zX). \end{aligned}$$

Tale probabilità si ottiene integrando la densità congiunta sulla regione corrispondente all'intersezione del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ con il semipiano al di sotto della retta $y = zx$. Per $0 < z \leq 1$ si deve integrare la densità congiunta sul triangolo inferiore

$$
\begin{aligned}
P(Y &< zX) = \int_0^1 dx \int_0^{zx} (x+y)dy \\
&= \int_0^1 xdx \int_0^{zx} dy + \int_0^1 dx \int_0^{zx} ydy \\
&= \int_0^1 zx^2 dx + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{zx} dx \\
&= z\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (zx)^2 dx \\
&= \frac{z}{3} + \frac{z^2}{6}.
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui invece $z > 1$ si deve integrare sul triangolo superiore:

$$
\begin{aligned}
P(Y &< zX) = \\
&= 1 - \int_0^1 dy \int_0^{y/z} (x+y)dx \\
&= 1 - \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y/z} dx - \int_0^1 \frac{y^2}{z} dy \\
&= 1 - \frac{1}{6z^2} - \frac{1}{3z}.
\end{aligned}
$$

Quindi la f.r. della Z è

$$
F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z}{3} + \frac{z^2}{6} & 0 < z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{6z^2} - \frac{1}{3z} & z > 1 \end{cases} ..
$$

Osserviamo che la f.r.è continua in $z = 0$ e in $z = 1$ e che per $z \longrightarrow +\infty$ tende ad 1.

Esercizio 11 Sia (X, Y) una v.a. doppia uniforme sul triangolo T di vertici $(0, 0), \left(\frac{1}{\alpha^2}, 0\right)$, $(0, 1)$. Trovare la funzione di ripartizione e la densità di $Z = \frac{X}{Y}$.
Soluzione:

Poichè $X, Y \in (0, +\infty)$ q.c.$\Rightarrow Z \in (0, +\infty)$ q.c.

Quindi bisogna calcolare la f.r. di Z per $z > 0$:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z < z) \\
&= P(Y > \frac{1}{z}X) \\
&= \int\int_{\left\{(x,y): y > \frac{1}{z}x\right\}} f_{X,Y}(x, y)dxdy \\
&= 2\alpha^2 \int\int_{\left\{(x,y): y > \frac{1}{z}x\right\}} 1_{(0<x<1/\alpha^2, 0<y<1-\alpha^2 x)} dxdy.
\end{aligned}
$$

La regione R su cui si integra è un triangolo ottenuto dall'intersezione del triangolo T con la regione al di sopra della retta $y = \frac{1}{z}x$, ovvero a $R = \left\{(x,y) \in T : y > \frac{1}{z}x\right\}$. Il triangolo R ha base pari ad 1 e altezza uguale a $\frac{z}{z\alpha^2+1}$ e quindi la sua superficie è pari a

$$Area(R) = \frac{z}{2(z\alpha^2+1)}.$$

La f.r. è perciò

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z\alpha^2}{(z\alpha^2+1)} & z > 0 \end{cases}.$$

Esercizio 12 Sia (X, Y) la v.a. doppia discreta che assume i valori e le rispettive probabilità riportate nella seguente tabella:

$X\backslash Y$	a	b
1	1/4	1/2
2	1/8	1/8

Determinare i valori di a per i quali la v.a. $X+Y$ può assumere solo 3 valori distinti. In corrispondenza di tali valori di a, determinare la distribuzione di probabilità di $X+Y$.

Soluzione

La v.a. $X+Y$ assume i seguenti valori con le rispettive probabilità

$$\begin{array}{ll} a+1 & \frac{1}{4} \\ a+2 & \frac{1}{8} \\ b+1 & \frac{1}{2} \\ b+2 & \frac{1}{8} \end{array}$$

Se specifichiamo i valori di a in modo che $X+Y$ assuma solo 3 valori distinti, vediamo che sono possibili due valori di a, ovvero $a = b-1$ e $a = b+1$.

In corrispondenza di $a = b-1$ otteniamo che la v.a. $X+Y$ assume i seguenti valori, con le rispettive probabilità

$$\begin{array}{ll} b & \frac{1}{4} \\ b+1 & \frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8} \\ b+2 & \frac{1}{8} \end{array}$$

Invece in corrispondenza di $a = b + 1$ otteniamo che la v.a. $X + Y$ assume i seguenti valori, con le rispettive probabilità

$$
\begin{array}{ll}
b+1 & \frac{1}{2} \\
b+2 & \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \\
b+3 & \frac{1}{8}
\end{array}
$$