Esercitazione 7

---

1. (*Esercizio n. 6.42 del Ross*) La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   a) Si determini la densità condizionata di X dato $Y = y$ e di Y dato $X = x$.

   b) Si determini la densità di $Z = XY$ usando i due metodi alternativi conosciuti.

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro p. Calcolare la distribuzione della v.a. $Z = \max(X,Y) - X$.

3. L'urna U contiene una proporzione p di palline bianche. Se indichiamo con B il numero di palline bianche estratte in n estrazioni con reimbussolamento da U, si calcolino media e varianza di B.(Si può adottare il metodo diretto o sfruttare il fatto che la Binomiale di parametri n e p è una somma di n v.a. indipendenti e bernoulliane di parametro p).

4. Supponiamo di avere due urne U_1 e U_2, con proporzione di palline bianche rispettivamente pari a p_1 e p_2, e di estrarre da esse (con reimbussolamento) rispettivamente k_1 e k_2 palline. Tutte le palline estratte vengono poi sistemate in una terza urna U_3.

   Se definiamo con X la proporzione di palline bianche nell'urna U_3, calcolare $E(X)$ e $V(X)$.

5. Siano X e Y due v.a. indipendenti con distribuzione geometrica di parametro p.

   a) Calcolare $P(X < 2Y)$.

   b) Calcolare la distribuzione di $Z = X + Y$.

   c) Calcolare $P(X = x|Z = z) = P(X = x|X + Y = z)$. E' vero o falso che la distribuzione di X condizionata all'evento $(X + Y = z)$ è l'uniforme discreta sull'insieme $\{1, 2, ..., z - 1\}$.

   d) Calcolare $E(X + 2Y)$ e $V(X + 2Y)$, tenendo conto che per una v.a. $X \sim Geom(p)$ si ha $EX = 1/p$ e $V(X) = q/p^2$.

6. Sia $U \sim Exp(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$, definiamo una nuova v.a. come $X = U^{1/\alpha}$.

   a) Determinare la distribuzione di X con i due metodi conosciuti. (Nota: poichè $U > 0$ q.c., si può utilizzare il Teorema poichè sull'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione è invertibile).

   b) Calcolare i momenti $E(X^r)$ della X, per $r > 1$.

7. Sia $X \sim Unif(0,1)$. Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a. definita come segue

$$Y = \begin{cases} \sqrt{2X} & 0 < X < \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2-2X} & \frac{1}{2} \leq X < 1 \end{cases},$$

usando i due metodi conosciuti. (Nota: anche in questo caso, poichè la v.a. X è q.c. positiva, si può usare il Teorema per ricavare la densità della trasformazione nei due intervalli).

8. Siano X e Y v.a. indipendenti ed entrambe esponenziali di parametro λ. Si calcoli

$$P(X > Y)$$

e si dia un'interpretazione intuitiva del risultato.

9. Sia (U, V) una v.a. doppia con densità congiunta pari a

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} v\lambda^2 e^{-\lambda v} & v > 0,\ 0 < u < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Quanto vale in questo caso la $P(U > V)$?

10. Sia (X, Y) una v.a. doppia con densità congiunta pari a

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Ricavare la distribuzione di $Z = \frac{Y}{X}$.

11. Sia (X, Y) una v.a. doppia uniforme sul triangolo T di vertici $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\alpha^2}, 0\right)$, $(0,1)$. Trovare la funzione di ripartizione e la densità di $Z = \frac{X}{Y}$.

12. Sia (X, Y) la v.a. doppia discreta che assume i valori e le rispettive probabilità riportate nella seguente tabella:

$X \backslash Y$	a	b
1	1/4	1/2
2	1/8	1/8

Determinare i valori di a per i quali la v.a. $X+Y$ può assumere solo 3 valori distinti. In corrispondenza di tali valori di a, determinare la distribuzione di probabilità di $X + Y$.