ESERCITAZIONE 6 BIS

---

1. Sia X una v.a. a.c. per la quale vale la seguente

$$P(X \geq x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

a) calcolare il $E(X)$, ricordando che $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Determinare la f.r. della v.a.

$$Y = X^2.$$

Soluzione:

a) Poichè la f.r. è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & x > 0 \end{cases}$$

e la densità è

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si ha che

$$\begin{aligned} EX &= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \left[\text{ponendo } x^2 = z\right] \\ &= \int_0^{+\infty} z^{\frac{3}{2}-1} e^{-z} dz = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

b) $Y \in (0, +\infty)$ q.c. e

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^2 < y) = P(X < \sqrt{y}) \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

quindi $Y \sim Exp(1)$.

2. Sia X una v.a. a.c. per la quale, per $\lambda > 1$, sia

$$P(X \geq x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ x^{-\lambda} & x > 1 \end{cases}.$$

a) calcolare il $E(X)$.

b) Determinare la f.r. della v.a.$Y = \ln X$.

Soluzione:

a) Poichè la f.r. è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - x^{-\lambda} & x > 1 \end{cases}$$

e la densità è

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda-1} & x > 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si ha che

$$EX = \lambda \int_1^{+\infty} x^{-\lambda} dx = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

b) $Y = \ln X \in (0, +\infty)$ q.c. e

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\ln X < y) = P(X < e^y) \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

quindi $Y \sim Exp(\lambda)$.

3. Sia (X, Y) una v.a. doppia uniforme sul triangolo T di vertici $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\alpha^2}, 0\right)$, $(0,1)$.

a) Calcolare la funzione di densità congiunta e le marginali.

b) Stabilire se X e Y sono indipendenti (Suggerimento: esprimere la densità congiunta in termini della funzione indicatrice).

Soluzione:

Iniziamo col rappresentare il supporto della v.a. (X, Y), che corrisponde al triangolo T delimitato dalle tre rette $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - \alpha^2 x$. In figura esso è rappresentato per $\alpha < 1$.

Per calcolare la densità congiunta consideriamo che, per l'uniforme su una regione T si ha

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Area(T)} & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Poichè, in questo caso, $Area(T) = \frac{1}{2\alpha^2}$, si ha

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \begin{cases} 2\alpha^2 & (x,y) \in T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \\ &= 2\alpha^2 1_{(0<x<1/\alpha^2, 0<y<1-\alpha^2 x)}. \end{aligned}$$

Per verificare se le variabili sono indipendenti dobbiamo ricavare le funzioni di densità marginali e vedere se il loro prodotto coincide con la densità congiunta:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_R f_{X,Y}(x,y)dy = 2\alpha^2 \int_R 1_{(0<x<1/\alpha^2, 0<y<1-\alpha^2 x)} dy \\ &= 2\alpha^2 1_{(0<x<1/\alpha^2)} \int_R 1_{(0<y<1-\alpha^2 x)} dy \\ &= 2\alpha^2 1_{(0<x<1/\alpha^2)} \int_0^{1-\alpha^2 x} dy \\ &= 2\alpha^2 \left(1-\alpha^2 x\right) 1_{(0<x<1/\alpha^2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_R f_{X,Y}(x,y)dx = 2\alpha^2 \int_R 1_{(0<x<1/\alpha^2, 0<y<1-\alpha^2 x)} dx \\ &= 2\alpha^2 \int_R 1_{(0<x<1/\alpha^2)} 1_{(0<y<1-\alpha^2 x)} dx \\ &= 2\alpha^2 \int_R 1_{(0<x<(1-y)/\alpha^2)} 1_{(0<y<1)} dx \\ &= 2\alpha^2 1_{(0<y<1)} \int_0^{(1-y)/\alpha^2} dx = 2(1-y) 1_{(0<y<1)}. \end{aligned}$$

Si vede immediatamente che $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ e quindi esse non sono indipendenti.

Esercizio 4. Un'indagine di mercato su un certo prodotto, condotta su quattro gruppi di consumatori, ha dato i seguenti risultati:

1.

$X \quad \backslash \quad Y$	$y_1 = sfav.$	$y_2 = fav.$	$Tot.$
$x_1 = A$	0.1	0.08	0.18
$x_2 = B$	0.2	0.08	0.28
$x_3 = C$	0.14	0.12	0.26
$x_4 = D$	0.16	0.12	0.28
$Tot.$	0.6	0.4	1

i) Le variabili sono o no indipendenti?

ii) Ricavare la distribuzione di probabilità condizionata di X dato $Y = y_1$ e di X dato $Y = y_2$.

Soluzione:

i) Per verificare se le variabili siano o no indipendenti basta controllare se

$$p_{i,j} = p_{i,.}\, p_{.,j}$$

Si vede immediatamente che non è così e quindi le variabili non sono indipendenti.

ii) Calcoliamo ora la distribuzione condizionata di X dato $Y = y_1$ e la poniamo nella seguente tabella:

$x_1 = A$	0.16
$x_2 = B$	0.33
$x_3 = C$	0.23
$x_4 = D$	0.26
Tot	1

Analogamente per la distribuzione condizionata di X dato $Y = y_2$:

$x_1 = A$	0.2
$x_2 = B$	0.2
$x_3 = C$	0.3
$x_4 = D$	0.3
Tot	1

Si può notare che le distribuzioni condizionate differiscono tra loro e dalla distribuzione marginale della X e ciò conferma che le variabili non sono indipendenti.

Esercizio 5

La v.a. doppia (X, Y) è assolutamente continua con densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0,\ 0 < y < 1/x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Si determinino le marginali di X e di Y. C'è indipendenza tra le variabili?

Soluzione: La densità congiunta si può scrivere come

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= xe^{-x} 1_{\{x>0,\ 0<y<1/x\}} \\ &= xe^{-x} 1_{\{x>0\}} 1_{\{0<y<1/x\}}. \end{aligned}$$

Ciò significa che il suppotrto della v.a. doppia è costituito dalla regione del I quadrante al di sotto dell'iperbole equilatera $y = 1/x$.

La f.d. della X si ottiene nel modo seguente

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} 1_{\{x>0\}} 1_{\{0<y<1/x\}} dy \\
&= 1_{\{x>0\}} xe^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{0<y<1/x\}} dy \\
&= 1_{\{x>0\}} xe^{-x} \int_{0}^{1/x} dy \\
&= 1_{\{x>0\}} xe^{-x} \frac{1}{x} \\
&= \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}$$

ovvero la $X \sim Exp(1)$.

Per la f.d. della Y si ha analogamente che

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} 1_{\{x>0\}} 1_{\{0<y<1/x\}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x} 1_{\{x>0\}} 1_{\{x<1/y\}} dx \\
&= \int_{0}^{1/y} xe^{-x} dx \\
&= [\text{per parti}] \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^{1/y} + \int_0^{1/y} e^{-x} dx \\
&= -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} + \left[-e^{-x}\right]_0^{1/y} \\
&= -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} + 1 - e^{-\frac{1}{y}} \\
&= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{y}} \left[1 + \frac{1}{y}\right] & y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Della v.a. doppia (Z, Y) si conosce la distribuzione marginale della prima componente che è $Z \sim Geom(p)$. Inoltre supponiamo che la distribuzione condizionata $Y|Z = z$ sia una esponenziale di parametro z (per ogni $z = 1, 2, ...$). Si ricavino

a) la distribuzione congiunta espressa nella forma seguente

$$P(Y < y, Z = z)$$

b) la f.r. marginale della Y.

Soluzione:

a) Per la definizione di probabilità condizionata

$$\begin{aligned} P(Y &< y, Z = z) = P(Y < y|Z = z)P(Z = z) \\ &= \int_0^y f_{Y|Z}(w|z)dw \cdot P(Z = z) \\ &= \int_0^y ze^{-zw}dw \cdot p(1-p)^{z-1}, \end{aligned}$$

poichè la distribuzione condizionata della Y dato $Z = z$ è uniforme di par. z mentre la distribuzione marginale di Z è una geometrica di par. p.

Quindi

$$\begin{aligned} P(Y &< y, Z = z) = z\left[-\frac{e^{-zw}}{z}\right]_0^y p(1-p)^{z-1} \\ &= \left(1 - e^{-zy}\right) p(1-p)^{z-1} \end{aligned}$$

per $z = 1, 2, ...$e $y > 0$.

b) Per trovare la f.r. marginale della Y devo sommare per tutti i valori dello spettro della X, infatti è

$$\begin{aligned} P(Y &< y) = P((Y < y) \cap \Omega) \\ &= P\left[(Y < y), \cup_{z=1}^{\infty}(Z = z)\right] \\ &= \sum_{z=1}^{\infty} P(Y < y, Z = z) \\ &= p\sum_{z=1}^{\infty}\left(1 - e^{-zy}\right)(1-p)^{z-1} \\ &= p\sum_{z=1}^{\infty}(1-p)^{z-1} - p\sum_{z=1}^{\infty} e^{-zy}(1-p)^{z-1} \\ &= [r = z - 1] \\ &= p\sum_{r=0}^{\infty}(1-p)^r - pe^{-y}\sum_{r=0}^{\infty}\left[e^{-y}(1-p)\right]^r \\ &= [\text{poichè la ragione delle progr. è } < 1] \\ &= p\frac{1}{1-1+p} - pe^{-y}\frac{1}{1-(1-p)e^{-y}} \\ &= \frac{1 - e^{-y} + pe^{-y} - pe^{-y}}{1-(1-p)e^{-y}} = \frac{1-e^{-y}}{1-qe^{-y}}, \qquad y > 0. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1-e^{-y}}{1-qe^{-y}}, & y > 0 \end{cases}.$$

Verifica:

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1-e^{-y}}{1-qe^{-y}} = 0$$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1-e^{-y}}{1-qe^{-y}} = 1$$