ESERCITAZIONE 6 - Soluzioni

Esercizio 1

Sia X una v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

trovare la distribuzione della v.a. $Y = 2X - 1$, usando i due metodi alternativi che conoscete. Calcolare inoltre la distribuzione della v.a. $Z = X^2 - Y$.(Suggerimento: esprimete Z in funzione della sola X). Perchè in questo caso si può usare un metodo solo?

Soluzione: I° metodo (della f.r.).

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}.$$

$X \in (0, 2)$ q.c.$\Rightarrow Y = 2X - 1 \in (-1, 3)$ q.c.

Calcoliamo la f.r. della v.a. Y,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ ? & -1 < y \leq 3 \\ 1 & y > 3 \end{cases}$$

per $y \in (-1, 3)$ si ha

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(2X - 1 < y) \\ &= P(X < \frac{y+1}{2}) \\ &= \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{(y+1)^2}{16} \end{aligned}$$

e quindi (derivando la f.r. rispetto a y) la funzione di densità è

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{8} & -1 < y < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

II° metodo (Teorema) $y = g(x) = 2x - 1$ è invertibile e ha inversa pari a $h(y) = \frac{y+1}{2}$ con derivata $h'(y) = \frac{1}{2}$.

Allora si ha direttamente

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| \\ &= \frac{y+1}{4}\frac{1}{2} = \frac{y+1}{8}. \end{aligned}$$

Per la v.a. Z non possiamo usare il secondo metodo perchè il quadrato non è una funzione monotona e quindi invertibile. Esprimo Z in funzione della sola X: infatti

$$Z = X^2 - Y = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Poichè $X \in (0,2)$ q.c.$\Rightarrow$ $Z \in (0,1)$ q.c. Usiamo il metodo della f.r. e calcoliamo

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ ? & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} .$$

Per $z \in (0,1)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P((X-1)^2 < z) \\ &= P(-\sqrt{z} < X - 1 < \sqrt{z}) \\ &= P(1 - \sqrt{z} < X < \sqrt{z} + 1) \\ &= \frac{(1+\sqrt{z})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{z})^2}{4} = \sqrt{z} \end{aligned}$$

e quindi

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \sqrt{z} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} .$$

e

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}} & 0 < z \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Esercizio 2

Calcolare EY e $V(Y)$ della variabile aleatoria Y definita nell'esercizio 1, usando i due metodi alternativi.

Soluzione: Usando la distribuzione della v.a. Y calcolata nell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-1}^{3} y \frac{1+y}{8} dy \\ &= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

mentre sfruttando la linearità del valor medio e la distribuzione della X si ha

$$\begin{aligned} E(2X-1) &= 2EX - 1 \\ &= 2\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx - 1 \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Per calcolare la varianza otteniamo innanzitutto il momento secondo

$$\begin{aligned} EY^2 &= \int_{-1}^{3} y^2 \frac{1+y}{8} dy \\ &= \frac{1}{8}\left(\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{3} \right) = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

cosicchè

$$\begin{aligned} V(Y) &= EY^2 - (EY)^2 \\ &= \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Alternativamente si può ottenere nel modo seguente

$$\begin{aligned} V(Y) &= 4V(X) \\ &= 4(EX^2 - (EX)^2) \\ &= 4\left(2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

essendo $EX = \frac{4}{3}$ e

$$EX^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2.$$

Esercizio 3

Calcolare EZ e $V(Z)$ della variabile aleatoria Z definita nell'esercizio 1.

Soluzione: In questo caso applichiamo solo il primo metodo, conoscendo la distribuzione della v.a. Z,

$$EZ = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned} V(Z) &= EZ^2 - (EZ)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^2}{\sqrt{z}} dz - \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}z^{5/2}\right]_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Si consideri, per $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} & t \geq 0 \\ 0 \quad \text{altrove} & \end{cases}.$$

Mostrare che f è una densità e calcolarne la funzione di ripartizione.

Soluzione: Per verificare che è una densità calcoliamo

$$
\begin{aligned}
& \lambda\alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} dt \\
= \; & [\text{ponendo } \lambda t^\alpha = z] \\
= \; & \frac{1}{\lambda^{1/\alpha}} \frac{\lambda\alpha}{\alpha} \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} e^{-z} z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz \\
= \; & \frac{\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} z^{1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1} e^{-z} dz = 1.
\end{aligned}
$$

La v.a. che possiede tale densità è detta Weibull di parametri λ e α.

Calcoliamo ora la f.r.:

$$
F_T(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \\ ? & t > 0 \end{cases}
$$

dove, per $t > 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= \lambda\alpha \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-\lambda u^\alpha} du \\
&= [\text{ponendo } \lambda u^\alpha = z] \\
&= \int_0^{\lambda t^\alpha} e^{-z} dz \\
&= \left[-e^{-z}\right]_0^{\lambda t^\alpha} = 1 - e^{-\lambda t^\alpha}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Sia T una v.a. con funzione di densità f definita nell'esercizio 4. Calcolare

$$
P(T > t + s | T > s).
$$

Per quali valori di α e λ questa funzione è crescente in s? Per quali valori è decrescente? Dovendo modellizzare con T il tempo di rottura di un'apparecchiatura soggetta ad usura, quali valori di α e λ scegliereste?

Soluzione: Applichiamo la formula della probabilità condizionata:

$$
\begin{aligned}
P(T &> t + s | T > s) \\
&= \frac{P((T > t + s) \cap (T > s))}{P(T > s)} \\
&= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)^\alpha}}{e^{-\lambda s^\alpha}} = e^{-\lambda(t+s)^\alpha + \lambda s^\alpha} = f(s).
\end{aligned}
$$

Per $\alpha = 1$ la $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ coincide con la densità della esponenziale.e infatti si ha che

$$
\begin{aligned}
P(T &> t + s | T > s) = e^{-\lambda t} \\
&= P(T > t).
\end{aligned}
$$

Ciò corrisponde alla proprietà di assenza di memoria dell'esponenziale.

Per $\alpha \neq 1$, studiamo il segno della derivata prima

$$f'(s) = \frac{df}{ds} = e^{\lambda s^\alpha} e^{-\lambda(t+s)^\alpha} \alpha\lambda \left[s^{\alpha-1} - (t+s)^{\alpha-1}\right].$$

Per $\alpha > 1$ si ha che $f'(s) < 0$ poichè $t+s > s \Rightarrow (t+s)^{\alpha-1} > s^{\alpha-1}$ (mentre tutte le altre quantità sono positive) e quindi è decrescente.

Per $\alpha < 1$ si ha che $f'(s) > 0$ poichè $t+s > s \Rightarrow (t+s)^{\alpha-1} < s^{\alpha-1}$ e quindi è crescente.

Quindi, per ogni λ, in presenza di usura è opportuno scegliere $\alpha > 1$, poichè più cresce s più deve diminuire la $P(T > t+s|T > s)$.

Esercizio 6

Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e sia $\beta > 0$. Quanto vale $E(X^\beta)$?

Soluzione:

Notiamo che, come visto nell'esercizio precedente l'esponenziale coincide con una Weibull di parametri λ e $\alpha = 1$ ovvero $X \sim Weibull\,(\lambda, 1)$.

$$\begin{aligned}
E(X^\beta) &= \int_0^{+\infty} x^\beta \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= [\text{ponendo } \lambda x = z] \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^\beta e^{-z} dz \\
&= \lambda^{-\beta}\Gamma(\beta+1).
\end{aligned}$$

In alternativa si poteva calcolare la densità di $Y = X^\beta$, con il metodo della f.r.

$$\begin{aligned}
P(X^\beta &< y) = P(X < y^{1/\beta}) \\
&= \int_0^{y^{1/\beta}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= (1 - e^{-\lambda y^{1/\beta}}).
\end{aligned}$$

Osserviamo che $Y \sim Weibull(\lambda, \frac{1}{\beta})$ ovvero

$$f_{X^{1/\beta}}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-\lambda y^{1/\beta}} & y > 0 \\ 0 \quad \text{altrove} & \end{cases}$$

e calcoliamo il suo v.m.:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{\lambda}{\beta}\int_0^{+\infty} y y^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-\lambda y^{1/\beta}} dy \\
&= \frac{\lambda}{\beta}\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{\beta}} e^{-\lambda y^{1/\beta}} dy \\
&= \left[\text{ponendo } \lambda y^{1/\beta} = z\right] \\
&= \frac{\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\lambda^{\beta}}\int_0^{+\infty} \frac{z}{\lambda} e^{-z} z^{\beta-1} dz \\
&= \frac{1}{\lambda^{\beta}}\Gamma(\beta+1).
\end{aligned}$$

Esercizio 7 (Esercizio n.8.1 del *Ross*) Il numero di automobili vendute ogni settimana in un dato concessionario si distribuisce come una variabile di valor medio pari a 16. Si dia un limite superiore per la probabilità che

a) la prossima settimana le vendite siano maggiori di 18 unità.

b) la prossima settimana le vendite siano maggiori di 25 unità.

Soluzione: Usando la diseguaglianza di Cebicev, per $a = 18$, e $r = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
P(X &> 18) = P(X \geq 19) \\
&\leq \frac{EX}{19} = \frac{16}{19}
\end{aligned}$$

e allo stesso modo per $a = 25$, si ha

$$\begin{aligned}
P(X &> 25) = P(X \geq 26) \\
&\leq \frac{EX}{26} = \frac{16}{26}.
\end{aligned}$$

Esercizio 8 (Esercizio n.8.2 del *Ross*) Supponiamo che nel precedente esercizio la varianza del numero di auto vendute settimanalmente sia 9. Si dia un limite inferiore alla probabilità che la prossima settimana le vendite siano comprese tra 10 e 22 unità.

Soluzione: Usiamo la versione della diseguaglianza di Cebicev in cui si considera la v.a. "scarto dal v.m.", ovvero $|X - EX|$ e per $r = 2$:

$$P(|X - EX| < a) \geq 1 - \frac{E(X - EX)^2}{a^2} = 1 - \frac{V(X)}{a^2}.$$

Quindi in questo caso si ha

$$\begin{aligned}
P(10 &< X < 22) = P(-6 < X - 16 < 6) \\
&= P(|X - 16| < 6) \geq 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 9 Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $Unif\,[a,b]$ e siano $a, b > 0$. Determinare, con i metodi conosciuti, la distribuzione della v.a.

$$W = \frac{1}{X}.$$

Soluzione: La v.a. $X \in [a,b]$ q.c. quindi $W = \frac{1}{X} \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ q.c.

Applichiamo il I metodo (quello della funzione di ripartizione):

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & 0 < w \leq \frac{1}{b} \\ ? & \frac{1}{b} < w \leq \frac{1}{a} \\ 1 & w > \frac{1}{a} \end{cases}$$

per $\frac{1}{b} < w \leq \frac{1}{a}$ si ha

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W < w) = P\left(\frac{1}{X} < w\right) \\ &= P\left(X > \frac{1}{w}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{w}\right) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{w} - a}{b - a} \\ &= \frac{b}{b-a} - \frac{1}{b-a} w^{-1}. \end{aligned}$$

Come verifica notiamo che $F_W\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ e che $F_W\left(\frac{1}{a}\right) = 1$. La densità la ottengo derivando la f.r. rispetto a w

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{d}{dw} F_W(w) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} w^{-2} & \frac{1}{b} < w \leq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}. \end{aligned}$$

Se invece applichiamo il Teorema (grazie al fatto che la X è a.c. e che $\frac{1}{X}$ è una funzione monotona e derivabile) si ha

$$\begin{aligned} W &= g(X) = \frac{1}{X} \\ X &= h(W) = \frac{1}{W} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} h'(w) &= -\frac{1}{w^2} \\ |h'(w)| &= \frac{1}{w^2} \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} f_W(w) &= f_X(h(w))|h'(w)| \\ &= \frac{1_{(a,b)}\left(\frac{1}{w}\right)}{b-a}\frac{1}{w^2} \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{1}{w^2}1_{\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)}(w)\,. \end{aligned}$$