

Esercitazione 6

1. Sia X una v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

trovare la distribuzione della v.a. $Y = 2X - 1$ e della v.a. $Z = X^2 - Y$.
(Suggerimento: esprimete Z in funzione della sola X).

2. Calcolare EY e $V(Y)$ della variabile aleatoria Y definita nell'esercizio 1, usando i due metodi alternativi che conoscete.
3. Calcolare EZ e $V(Z)$ della variabile aleatoria Z definita nell'esercizio 1. Perché in questo caso si può usare un metodo solo?
4. Si consideri, per $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Mostrare che f è una densità e calcolarne la funzione di ripartizione.

5. Sia T una v.a. con funzione di densità f definita nell'esercizio 4. Calcolare

$$P(T > t + s | T > s).$$

Per quali valori di α e λ questa funzione è crescente in s ? Per quali valori è decrescente? Dovendo modellizzare con T il tempo di rottura di un'apparecchiatura soggetta ad usura, quali valori di α e λ scegliereste?

6. Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e sia $\beta > 0$. Quanto vale $E(X^\beta)$?
7. (Esercizio n.8.1 del *Ross*) Il numero di automobili vendute ogni settimana in un dato concessionario si distribuisce come una variabile di valor medio pari a 16. Si dia un limite superiore per la probabilità che
- la prossima settimana le vendite siano maggiori di 18 unità.
 - la prossima settimana le vendite siano maggiori di 25 unità.
8. (Esercizio n.8.2 del *Ross*) Supponiamo che nel precedente esercizio la varianza del numero di auto vendute settimanalmente sia 9. Si dia un limite inferiore alla probabilità che la prossima settimana le vendite siano comprese tra 10 e 22 unità.
9. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $Unif[a, b]$ e siano $a, b > 0$. Determinare, con i metodi conosciuti, la distribuzione della v.a.

$$W = \frac{1}{X}.$$