Esercitazione 5
Soluzioni

1. (*Esercizio 5.1 del Ross*) Sia X una variabile aleatoria la cui densità è

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (a) Qual è il valore di c?

   (b) Scrivere la funzione di ripartizione di X.

2. (*Esercizio 5.3 del Ross*) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^3) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   può essere una densità? In tal caso determinare C. Stessa domanda con $f(x)$ data da

$$f(x) = \begin{cases} C(2x-x^2) & 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. (*Esercizio 5.4 del Ross*) La densità di X, il tempo di vita di una data apparecchiatura elettronica (misurata in ore), è data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (a) Determinare $P(X > 20)$;

   (b) Qual è la funzione di distribuzione (o, equivalentemente, di ripartizione) di X?

   (c) Qual è la probabilità che su 6 apparecchiature di questo tipo almeno 3 funzionino per almeno 15 ore? Che ipotesi state facendo?

4. (*Esercizio 5.10 del Ross*) I treni per una destinazione A passano alla stazione ogni 15 minuti a partire dalle 7; quelli per B passano ogni 15 minuti a partire dalle 7:05.

   (a) Un passeggero arriva alla stazione in un instante che è uniformemente distribuito tra le 7 e le 8 e sale sul primo treno che arriva. Qual è la probabilità che egli salga su un treno diretto ad A?

   (b) Stessa domanda se il passeggero arriva in un instante che è uniformemente distribuito tra le 7:10 e le 8:10.

5. (*Esercizio 5.13 del Ross*) Arrivi alla fermata dell'autobus alle 10, sapendo che l'istante di arrivo dell'autobus è uniformemente distribuito tra le 10 e le 10:30.

   (a) Qual è la probabilità che tu debba aspettare più di 10 minuti?

(b) Se l'autobus non è ancora passato alle 10:15, qual è la probabilità di dover aspettare altri 10 minuti?

6. (*Esercizio 5.32 del Ross*) Il tempo (in ore) richiesto per riparare un macchinario è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Qual è

   (a) la probabilità che la riparazione duri più di 2 ore;

   (b) la probabilità condizionata che la riparazione duri più di 10 ore sapendo che la sua durata supera le 9 ore?

7. (*Esercizio 5.33 del Ross*) Il numero di anni di funzionamento di un tipo di radio è distribuito esponenzialmente con parametro $\lambda = \frac{1}{8}$. Comprando una radio usata di questo tipo, qual è la probabilità che essa duri per più di 8 anni dal momento dell'acquisto? Considerare i due casi distinti:

   (a) quando compro la radio, la radio è vecchia di un anno;

   (b) quando compro la radio, la radio è vecchia di 10 anni.

8. (*esame del 5 giugno 2003*) Sia X una v.a. assolutamente continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (1, e) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   (a) Trovare la funzione di ripartizione di X.

   (b) Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $P(X < a) = \frac{1}{2}$. [Il numero a è la mediana della distribuzione.]

1. La costante c deve essere non negativa (perché $1-x^2 \geq 0$ per $x \in (-1,1)$) e tale che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$. Quindi si ha

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} c(1-x^2)\, dx = c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c\left[1 - \frac{1}{3} - \left((-1) - \frac{-1}{3}\right)\right] = c\frac{4}{3}$$

per cui $c = \frac{3}{4}$.

La densità è positiva su $(-1,1)$ e nulla al di fuori, quindi la funzione di ripartizione soddisfa

$$F(x) = 0 \quad x \leq -1 \qquad \text{e} \qquad F(x) = 1 \quad x > 1.$$

Per $x \in (-1,1]$ si ha

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\, dt = \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right).$$

e quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right) & -1 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

2. La funzione $2x - x^3$ è non negativa per $0 < x \leq \sqrt{2}$, ma è negativa per $\sqrt{2} < x < \frac{5}{2}$. Quindi

   C non può essere positivo, altrimenti avremmo una densità negativa per $\sqrt{2} < x < \frac{5}{2}$;

   C non può essere negativo, altrimenti avremmo una densità negativa per $0 < x \leq \sqrt{2}$;

   C non può essere $= 0$, altrimenti avremmo una densità sempre nulla, con integrale diverso da 1.

   In conclusione, la funzione che vale $C(2x - x^3)$ per $0 < x < \frac{5}{2}$ non può essere una densità.

   Lo stesso discorso vale per la funzione definita come $2x - x^2$ per $0 < x < \frac{5}{2}$ e 0 altrove.

3. Cominciamo col determinare la funzione di ripartizione di X (punto (b)):

   sappiamo che la densità è nulla per $x < 10$, quindi $X \geq 10$ quasi certamente e per ogni $x \leq 10$ si avrà $F(x) = 0$. Per $x > 10$, invece,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{10}^{x} 10t^{-2}\, dt = 10\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{10}^{x} = 10\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{10}{x}$$

   e quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 10 \\ 1 - \frac{10}{x} & x > 10. \end{cases}$$

   La probabilità richiesta al punto (a) è

$$P(X > 20) = 1 - F(20^+) = 1 - F(20) = 1 - (1 - \frac{10}{20}) = \frac{1}{2}$$

(abbiamo ignorato il $^+$ perchè X è assolutamente continua).

(c) Un apparecchio di questo tipo funziona almeno 15 ore con probabilità

$$P(X > 15) = 1 - F(15^+) = 1 - (1 - \frac{10}{15}) = \frac{2}{3}.$$

Nell'ipotesi che la durata di ciascun apparecchio sia indipendente da quella degli altri, ci troviamo in uno schema di prove ripetute in cui si considera come "successo" il fatto che l'apparecchio duri più di 15 ore. Quindi la probabilità di successo in ciascuna prova è $p = \frac{2}{3}$ e la probabilità di avere j successi in 6 prove è, secondo la distribuzione binomiale

$$P(j \text{ successi in 6 prove}) = \binom{6}{j}(\tfrac{2}{3})^j(\tfrac{1}{3})^{6-j} \qquad j = 0, 1, \cdots, 6.$$

e quindi la probabilità richiesta è

$$P(\text{almeno 3 successi in 6 prove}) = \sum_{j=3}^{6}\binom{6}{j}(\tfrac{2}{3})^j(\tfrac{1}{3})^{6-j}.$$

4. Per semplicità, cominciamo a contare il tempo in minuti alle 7:00. Sia X la variabile aleatoria che indica il momento in cui il passeggero arriva alla stazione.

(a) Dalle ipotesi del problema, $X \sim U(0, 60)$ per cui

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & 0 < x \leq 60 \\ 1 & x > 60. \end{cases}$$

Il passeggero prende il treno che va alla destinazione A se arriva

- tra le 7:05 e le 7:15 (quindi $X \in [5, 15)$)
- tra le 7:20 e le 7:30 (quindi $X \in [20, 30)$)
- tra le 7:35 e le 7:45 (quindi $X \in [35, 45)$)
- tra le 7:50 e le 8: (quindi $X \in [50, 60)$)

Qualcuno può non essere d'accordo su come sono chiusi o aperti gli intervalli, ma la cosa e' irrilevante perché X è assolutamente continua.

Poiché i 4 eventi di sopra sono incompatibili, la probabilità cercata è la somma delle 4 probabilità:

$$\begin{aligned} P(\text{treno per A}) &= P(X \in [5, 15)) + P(X \in [20, 30)) + P(X \in [35, 45)) + P(X \in [50, 60)) \\ &= F_X(15) - F_X(5) \ + \ F_X(30) - F_X(20) \ + \ F_X(45) - F_X(35) \ + \ F_X(60) - F_X(50) \\ &= \frac{15 - 5 \ + \ 30 - 20 \ + \ 45 - 35 \ + \ 60 - 50}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Poichè la v.a. X è uniforme, la probabilità che X appartenga ad un qualunque intervallo di ampiezza 10 è costante e pari a

$$10\frac{1}{60} = \frac{1}{6}.$$

Quindi bastava calcolare

$$P(\text{treno per A}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

(b) In questo caso $X \sim U(10,70)$ e il passeggero prende il treno giusto se

$$X \in [10,15) \cup [20,30) \cup [35,45) \cup [50,60) \cup [65,70)$$

evento che ha ancora probabilità $\frac{40}{60}$.

5. Anche qui cominciamo a contare il tempo dalle 10:00

   Il tempo di attesa X, per ipotesi, ha distribuzione $U(0,30)$, per cui

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{30} & 0 < x \leq 30 \\ 1 & x > 30 \end{cases}$$

   e quindi

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - F_X(10^+) = 1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3} \\ P(X > 25|X > 15) &= \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} = \frac{1 - F_X(25^+)}{1 - F_X(15^+)} = \frac{\frac{5}{30}}{\frac{15}{30}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6. Indichiamo con X il tempo necessario a riparare il macchinario. Sappiamo che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0. \end{cases}$$

   Le probabilità richieste sono

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - F_X(2^+) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}2}) = e^{-1} \\ P(X > 10|X > 9) &= \frac{P(X > 10)}{P(X > 9)} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}10})}{1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}9})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}10}}{e^{-\frac{1}{2}9}} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

7. Indichiamo con X la durata della radio. Sappiamo che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{8}x} & x > 0. \end{cases}$$

   La probabilità che la radio duri più di 8 anni dal momento che la compro è:

   - se al momento dell'acquisto è vecchia di un anno:

$$P(X > 1 + 8|X > 1) = \frac{P(X > 9)}{P(X > 1)} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{9}{8}})}{1 - (1 - e^{-\frac{1}{8}})} = e^{-\frac{8}{8}} = e^{-1}$$

   - se al momento dell'acquisto è vecchia di 10 anni:

$$P(X > 10 + 8|X > 10) = \frac{P(X > 18)}{P(X > 10)} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{18}{8}})}{1 - (1 - e^{-\frac{10}{8}})} = e^{-\frac{8}{8}} = e^{-1}.$$

   Le due probabilità coincidono perché l'esponenziale è senza memoria e quindi il fatto che la radio abbia funzionato per 10 anni non altera le probabilità di vita residua.

8.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \log x & 1 < x \leq e \\ 1 & x > e. \end{cases}$$

Deve essere $\frac{1}{2} = P(X < a) = F(a) = \log a$, quindi $a = \sqrt{e}$.