Esercitazione 4

1. (*Esercizio 4.1 del Ross*) Due palline vengono scelte a caso da un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo che si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda uno per ogni pallina bianca estratta. Denotiamo con X la vincita. Quali sono i possibili valori di X e con quali probabilità vengono ottenuti (nei due casi con e senza ripetizone)?

2. (*Esercizio 4.17 del Ross*) Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{12} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

   (a) Verificare che F_X è una funzione di ripartizione;
   (b) Calcolare $P(X = i)$ per $i = 1, 2, 3$.
   (c) Calcolare $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

3. (*Esercizio 4.18 del Ross*) Si lancia quattro volte una moneta equilibrata. Denotiamo con X il numero totale di testa ottenute. Calcolare la distribuzione della variabile aleatoria $X - 2$ e disegnarne il grafico.

4. (*Esercizio 4.41 del Ross*) Un uomo afferma di avere poteri extrasensoriali. Come test, viene lanciata 10 volte una moneta equilibrata e si chiede all'uomo di prevederne l'esito in anticipo. Lui indovina 7 dei 10 risultati. Qual è la probabilità che lo abbia conseguito se non è dotato dei suddetti poteri (ovvero ha agito in maniera casuale)?

5. (*Esercizio 4.67 del Ross*) Due squadre di basket si sfidano a una serie di incontri; il primo team che vince 4 partite è dichiarato vincitore della sfida. Supponiamo che una delle squadre sia più forte dell'altra e che vinca ogni singola partita con probabilità pari a 0.6, indipendentemente dagli altri incontri. Si trovi la probabilità che il team più forte vinca la sfida in esattamente i incontri, con $i = 5, 6, 7$. Si confronti la probabilità che la squadra più forte vinca la sfida con la probabilità che la vinca in una sfida al meglio di tre partite (cioè si aggiudica la sfida il primo che vince due partite).

6. (*I Esonero 2003)* Un giocatore lancia un dado regolare.
   (a) Calcolare la probabilità di ottenere 6 almeno una volta in tre lanci;
   (b) Qual'è il numro minimo di lanci del dado necessari affinchè la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

7. (*I Esonero 2003)* Sul mercato esistono computer di due marche A e B. La marca A detiene il 60% delle quote di mercato. Il numero di difetti di produzione per ogni computer di marca A si distribuisce come una $Poisson(2)$, mentre per quelli di marca B come una $Poisson(3)$.
   (a) Calcolare la probabilità che un computer acquistato abbia 2 difetti;
   (b) Se su di esso si riscontrano 3 difetti, determinare la probabilità che sia del tipo A.

Esercitazione 4 – soluzioni

1. Le combinazioni di colori che possono uscire sono: $\Omega = \{bb, bg, bn, gb, gg, gn, nb, ng, nn\}$.

   I valori di X corrispondenti sono

$$
\begin{array}{rrr}
X(bb) = -2 & X(bg) = -1 & X(bn) = 1 \\
X(gb) = -1 & X(gg) = 0 & X(gn) = 2 \\
X(nb) = 1 & X(ng) = 2 & X(nn) = 4
\end{array}
$$

   per cui la variabile aleatoria X assume i valori $-2, -1, 0, 1, 2, 4$.

   Le probabilità variano a seconda che l'estrazione sia effettuata con ripetizione o senza. Iniziamo con il caso senza ripetizione:

$$
\begin{aligned}
P(X = -2) &= P(\{bb\}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{56}{182} \\
P(X = -1) &= P(\{bg\}) + P(\{gb\}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{32}{182} \\
P(X = 0) &= P(\{gg\}) = \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{182} \\
P(X = 1) &= P(\{bn\}) + P(\{nb\}) = \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{64}{182} \\
P(X = 2) &= P(\{ng\}) + P(\{gn\}) = \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{16}{182} \\
P(X = 4) &= P(\{nn\}) = \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{12}{182}
\end{aligned}
$$

   E' facile verificare che la somma delle $p_k = P(X = k)$ per k che varia nello spettro della v.a. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ è pari ad 1.

   Nel caso con ripetizione abbiamo invece

$$
\begin{aligned}
P(X = -2) &= P(\{bb\}) = \frac{8}{14} \frac{8}{14} = \frac{16}{49} \\
P(X = -1) &= 2P(\{bg\}) = 2 \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{2}{14} = \frac{8}{49} \\
P(X = 0) &= P(\{gg\}) = \frac{2}{14} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{49} \\
P(X = 1) &= 2P(\{bn\}) = 2 \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{14} = \frac{16}{49} \\
P(X = 2) &= 2P(\{ng\}) = 2 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{14} = \frac{4}{49} \\
P(X = 4) &= P(\{nn\}) = \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{14} = \frac{4}{49}
\end{aligned}
$$

   Anche in questo caso si può verificare che la somma delle probabilità appena ottenute è 1.

2. F_X soddisfa tutte le proprietà richieste. Innanzitutto è non decrescente come si può verificare notando che nei punti di discontinuità si ha

$$\begin{aligned} F_X(1) &= \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = F_X(1^+) \\ F_X(2) &= \frac{3}{4} < \frac{11}{12} = F_X(2^+) \\ F_X(3) &= \frac{11}{12} < 1 = F_X(3^+). \end{aligned}$$

mentre negli intervalli $(0,1]$ e $(1,2]$ è una retta crescente e nell'intervallo $(2,3]$ è costante.

La continuità a sinistra è immediatamente verificata da come è definita.

Infine

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$

anzi, in questo caso la f.r. è 0 per un qualunque $x \leq 0$. Allo stesso modo

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$$

anzi è 1 per un qualunque $x > 3$.

Per quanto riguarda i punti successivi,

$$\begin{aligned} P(X=1) &= F(1^+) - F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ P(X=2) &= F(2^+) - F(2) = \frac{11}{12} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6} \\ P(X=3) &= F(3^+) - F(3) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \\ P(\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{2}) &= F(\tfrac{3}{2}) - F(\tfrac{1}{2}^+) = (\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}-1}{4}) - \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Sappiamo che X ha distribuzione Binomiale di parametri $(n = 4, p = \frac{1}{2})$, quindi X assume valori nell'insieme $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con probabilità

$$P(X = j) = \binom{4}{j} (\tfrac{1}{2})^j (\tfrac{1}{2})^{4-j} = \binom{4}{j} \frac{1}{2^4} \qquad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Quindi la variabile aleatoria $Y = X - 2$ assumerà valori in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ con probabilità

$$P(Y = y) = P(X - 2 = y) = P(X = y + 2) = \binom{4}{y+2} \frac{1}{2^4} \qquad j = -2, -1, 0, 1, 2.$$

I punti da mettere nel grafico sono (per ciascuno di questi punti mettere un bastoncino verticale che congiunge l'asse delle x con il punto)

$$(-2, \frac{1}{2^4}) \quad (-1, \frac{4}{2^4}) \quad (0, \frac{6}{2^4}) \quad (1, \frac{4}{2^4}) \quad (2, \frac{1}{2^4}).$$

4. Se l'uomo non ha i poteri extrasensoriali, per ogni lancio di moneta lui dà una risposta a caso e indovina con probabilità 1/2. Siccome le prove sono indipendenti, il numero di successi X (numero di risposte esatte) ha distribuzione binomiale di parametri $(n = 10, p = \frac{1}{2})$. Quindi

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} (\tfrac{1}{2})^7 (\tfrac{1}{2})^3 = 120 \frac{1}{2^{10}} \simeq 11.7\%.$$

5. Per l'indipendenza tra i risultati siamo in uno schema di prove ripetute in cui la probabilità di successo (ossia di vittoria della squadra più forte) in ciascuna prova è $p = 0.6$.

   La squadra forte vince in 4 partite se ha successo nelle in tutte e quattro le prime partite, evento che avviene con probabilità

$$P(4 \text{ successi in } 4 \text{ prove}) = p^4 = 0.6^4.$$

   Per avere vittoria in 5 partite, la squadra forte deve aver perso una delle prime 4 partite e vinto tutte le altre (fino alla quinta), quindi

$$P(3 \text{ successi e } 1 \text{ insuccesso nelle prime } 4, \text{ poi successo alla quinta}) = \\ = \binom{4}{3} p^3(1-p) \cdot p = \binom{4}{3} p^4(1-p).$$

   Per avere vittoria in 6 partite, la squadra forte deve aver perso due delle prime 5 partite e vinto tutte le altre (fino alla sesta), quindi

$$P(3 \text{ successi e } 2 \text{ insuccessi nelle prime } 5, \text{ poi successo alla sesta}) = \\ = \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 \cdot p = \binom{5}{3} p^4(1-p)^2.$$

   Per avere vittoria in 7 partite, la squadra forte deve aver perso tre delle prime 6 partite e vinto tutte le altre, quindi

$$P(3 \text{ successi e } 3 \text{ insuccessi nelle prime } 6, \text{ poi successo alla settima}) = \\ = \binom{6}{3} p^3(1-p)^3 \cdot p = \binom{6}{3} p^4(1-p)^3.$$

   In generale, vince in i partite, con $i = 4, 5, 6, 7$ se ha 3 successi nelle prime $i - 1$ prove e poi ha successo all'i-esima, quindi

$$P(\text{vince in } i \text{ partite}) = \binom{i-1}{3} p^4(1-p)^{i-4}. \tag{1}$$

   Si tratta della variabile aleatoria Binomiale negativa, che rappresenta il tempo di attesa del k-esimo successo (in una serie di prove indipendenti e con probabilità di successo costante e pari a p) ovvero il numero di prove necessarie per ottenere il k-esimo successo. In questo caso $k = 4$ e $p = 0.6$. Infatti la distribuzione di una $X \sim BinNeg(k, p)$ è data da

$$P(X = i) = \binom{i-1}{k-1} p^k(1-p)^{i-k}, \qquad i = k, k+1, ...$$

   che si riduce alla (1) per $k = 4$.

   La probabilità che la squadra più forte vinca è data dalla somma delle quattro probabilità calcolate sopra

$$P(\text{vince}) = \sum_{i=4}^{7} P(\text{vince in } i \text{ partite}) = \sum_{i=4}^{7} \binom{i-1}{3} p^4(1-p)^{i-4}.$$

Se facessimo un incontro al meglio dei 3 successi invece di 4, la probabilità di vittoria della squadra più forte sarebbe sempre data da una Binomiale negativa ma con $k = 3$ e quindi

$$\sum_{i=3}^{5} \binom{i-1}{2} p^3 (1-p)^{i-3}.$$

Fate voi i conti ricordando che $p = 0.6$.

(a)

$$\begin{aligned} P(6 \text{ almeno una volta su tre}) &= 1 - P(\text{mai 6 in tre}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= 0.42. \end{aligned}$$

(b) In questo caso il numero di lanci è incognito (lo chiamo n) e deve essere tale che

$$\begin{aligned} P(6 \text{ almeno una volta su } n) &= 1 - P(\text{mai 6 in } n) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.9. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 0.1 &\geq \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \ln 0.1 &\geq n \ln \frac{5}{6} = n \ln 0.83 \end{aligned}$$

ATTENZIONE: il segno negativo di $\ln 0.1$ e di $\ln \frac{5}{6}$ fa ribaltare la diseguaglianza. Quindi si ha

$$n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.83} = 12.1.$$

Poichè il numero minimo di lanci deve essere intero sarà pari a 13.

6. Si indichi con X la v.a. numero di difetti e con A l'evento il computer è di marca A (e analogamente per B); allora i dati del problema si possono riassumere come segue:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.6, \qquad P(B) = 0.4 \\ (X|A) &\sim Poiss(2) \end{aligned}$$

ovvero

$$P(X = k|A) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, ...$$

Analogamente

$$\begin{aligned} (X|B) &\sim Poiss(3) \qquad \text{ovvero} \\ P(X &= k|B) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, ... \end{aligned}$$

Quindi per calcolare la probabilità al punto a) devo fare i seguenti passaggi:

$$
\begin{aligned}
P(X &= 2) = P((X = 2) \cap \Omega) \\
&= P((X = 2) \cap (A \cup B)) \\
&= P(X = 2, A) + P(X = 2, B) \\
&= P(X = 2|A)P(A) + P(X = 2|B)P(B) \\
&= e^{-2}\frac{2^2}{2!} \cdot 0.6 + e^{-3}\frac{3^2}{2!} \cdot 0.4 \\
&= 0.16 + 0.09 = 0.25.
\end{aligned}
$$

Per il punto b) dobbiamo usare la formula di Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(A|X &= 3) = \frac{P(X = 3|A)P(A)}{P(X = 3|A)P(A) + P(X = 3|B)P(B)} \\
&= \frac{e^{-2}\frac{2^3}{3!} \cdot 0.6}{e^{-2}\frac{2^3}{3!} \cdot 0.6 + e^{-3}\frac{3^3}{3!} \cdot 0.4} \\
&= \frac{0.65}{0.65 + 0.54} = 0.55.
\end{aligned}
$$