Esercitazione 3 –

---

1. Si lancia una moneta ripetutamente finchè non esce testa (cf. eserc.2, n.3). Supponendo di sapere che la moneta è bilanciata, calcolare la probabilità

   (a) di ottenere testa al terzo lancio;

   (b) di ottenere testa per la prima volta al al terzo lancio (evento E_3);

   (c) di ottenere testa entro i primi n lanci;

   (d) di ottenere testa per 3 volte nei primi n lanci;

   (e) di ottenere testa la prima volta all'n-mo lancio;

   (f) del complemento dell'unione di tutti gli E_n.

   Ripetere il tutto supponendo di lanciare un dado regolare (invece di una moneta) fermandosi la prima volta che esce un numero minore di 3 (quindi 1 oppure 2).

2. Un'urna contiene 18 palline, 12 delle quali sono arancioni. Si estraggono dall'urna 4 palline. Sapendo che 3 delle palline estratte sono arancioni, con che probabilità sono arancioni le prime due estratte? Considerare sia il caso con rimpiazzo della pallina estratta (con ripetizione) che quello senza rimpiazzo.

3. (*Esercizio 2.11 del Ross*) Una gravidanza extrauterina si può sviluppare 2 volte più facilmente se la donna incinta è una fumatrice piuttosto che se è non fumatrice. Se il 32% delle donne in età fertile sono fumatrici, quale percentuale di donne che sviluppano una gravidanza extrauterina sono delle fumatrici?

4. (*Esercizio 2.12 del Ross*) Il 98% dei neonati sopravvive al parto. Tuttavia il 15% dei parti sono cesarei, e quando si realizza un parto cesareo il neonato sopravvive nel 96% dei casi. Qual è la probabilità che il neonato di una donna che non fa parto cesareo sopravviva al parto?

5. (*Esercizio 2.14 del Ross*) Il 46% degli elettori di un comune si ritiene politicamente di centro, il 30% di sinistra e il 24% di destra. In una elezione recente sono andati a votare il 35% degli elettori di centro, il 62% di quelli di sinistra e il 58% di quelli di destra. Un elettore è scelto a caso. Sapendo che l'elettore ha votato alle scorse elezioni, qual è la probabilità che si tratti di un centrista? di uno di sinistra? di uno di destra?

   Quale percentuale di elettori hanno partecipato alla scorsa elezione?

6. Un videogioco è costituito da tre schermate successive, di difficoltà crescente. Se il concorrente supera indenne una schermata, può passare a quella succesiva altrimenti ha perso. Se supera indenne tutte e tre le schermate vince il gioco. Un giocatore supera la prima schermata con probabilità 0.4. Una volta superata la prima schermata, la probabilità che superi anche la seconda è 0.3. Superate le prime due schermate, la probabilità che vinca il gioco (quindi che superi indenne anche la terza schermata) è 0.1.

   Qual è la probabilità che il giocatore vinca il gioco?

   Se il giocatore ha perso, qual è la probabilità che abbia fallito alla prima schermata? e alla seconda?

7. L'urna U_1 contiene 2 palline arancioni e 4 palline di altro colore. L'urna U_2 invece contiene una pallina arancione e una di altro colore. Estraiamo una pallina a caso dalla prima urna e la mettiamo nella seconda, poi estraiamo una pallina dalla seconda urna.

   Con che probabilità la pallina estratta da U_2 è arancione?

   Sapendo che la pallina estratta da U_2 è arancione, con che probabilità quella trasferita dalla prima alla seconda urna è arancione?

8. (*esame del 22 settembre 2004*) Il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce bianche, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce bianche. Si lancia una sola volta una moneta non truccata. Se esce testa, il gioco continua con il dado A; se esce croce si usa il dado B.

   Mostrare che la probabilità che la faccia sia rossa a ogni lancio è $\frac{1}{2}$.

   Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che venga rosso al terzo lancio?

   Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A?

Esercitazione 3 – soluzioni

1. Innanzi tutto gli eventi considerati ai punti (a) e (b) coincidono: l'evento *"si ottiene testa al terzo lancio"* coincide con E_3 perché non posso aver avuto testa anche in lanci precedenti, altrimenti mi sarei fermato prima. Per lo stesso motivo, l'evento considerato al punto (d) non può verificarsi, quindi è impossibile ed ha probabilità nulla.

   In pratica dobbiamo trovare

   - $P(E_3)$ per rispondere ai punti (a) e (b);
   - $P(E_n)$ per rispondere al punto (e);
   - $P(\bigcup_{k=1}^n E_k)$ per rispondere al punto (c);
   - $P((\bigcup_{n=1}^\infty E_n)^c)$ per rispondere al punto (f).

   Per E_3 basta limitarsi a considerare quello che succede nei primi 3 lanci: i casi possibili sono 2^3 con un solo caso favorevole (CCT), quindi

   $$P(E_3) = \frac{1}{8}.$$

   Un altro modo di ottenere il risultato è notando che i lanci danno luogo ad eventi indipendenti. In ogni lancio ho T con probabilità $1/2$ e C con probabilità $1/2$, quindi

   $$P(E_3) = P(CCT) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

   Nel caso del lancio del dado, ad ogni lancio esce 1 o 2 con probabilità $\frac{1}{3}$ e quindi

   $$P(E_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3}.$$

   Se indichiamo con p la probabilità dell'evento che interessa nella singola prova (ad esempio $p = \frac{1}{2}$ se interessa T nel lancio della moneta; $p = \frac{1}{3}$ se interessa 1 o 2 nel lancio di un dado, e così via), allora

   $$P(E_3) = (1-p)^2 p.$$

   Nel seguito facciamo tutti i conti considerando un generico $p \in (0,1)$.

   Per calcolare la probabilità di E_n:

   $$P(E_n) = P(\underbrace{C \cdots C}_{n-1 \text{ volte}}\ T) = \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{n-1 \text{ volte}} p = (1-p)^{n-1} p.$$

   Quindi nel caso del lancio della moneta la probabilità è $\frac{1}{2^n}$, nel caso del dado è $(\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$.

   Gli eventi $E_1, E_2, \cdots$ sono a due a due incompatibili (se esce T la prima volta al terzo lancio, non può uscire la prima volta al quinto), per cui

   $$P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n P(E_k) = \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p \overset{(s=k-1)}{=} p \sum_{s=0}^{n-1} (1-p)^s = p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$$

(nel penultimo passaggio abbiamo usato la famosa formula per la somma delle prime J potenze di un numero $\sum_{j=0}^{J} x^j = \frac{1-x^{J+1}}{1-x}$).
Di conseguenza $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$ per cui $P((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c) = 0$.
L'evento $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c =$ "non esce mai testa" è quasi impossibile.

2. Indichiamo con

$$\begin{aligned} E &= \text{le prime due estratte sono arancioni} \\ F &= \text{sono estratte 3 palline arancioni} \end{aligned}$$

e cerchiamo $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$.
Si vede facilmente che

$$E \cap F = \{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\} \cup \{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}$$

Caso con ripetizione (rimpiazzo):
È uno schema di prove ripetute con probabilità di successo $p = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, quindi

$$P(F) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}.$$

Sappiamo anche che i risultati relativi ad estrazioni diverse sono indipendenti, quindi per gli eventi che compongono $A \cap B$ si ha

$$\begin{aligned} P(\{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\}) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{81} \\ P(\{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{81} \end{aligned}$$

per cui $P(E\cap F) = \frac{16}{81}$ e $P(E|F) = \frac{16/81}{32/81} = \frac{1}{2}$.

Caso senza ripetizione:
Sappiamo dalle cose viste a lezione che in questo caso $P(F) = \frac{\binom{12}{3}\binom{6}{1}}{\binom{18}{4}} = \frac{31680}{73440}$.
Per gli eventi che compongono $E \cap F$ si ha

$$\begin{aligned} P(\{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\}) &= \frac{12}{18}\cdot\frac{11}{17}\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15} = \frac{7920}{73440} \\ P(\{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}) &= \frac{12}{18}\cdot\frac{11}{17}\cdot\frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15} = \frac{7920}{73440} \end{aligned}$$

per cui $P(E\cap F) = \frac{15840}{73440}$ e $P(E|F) = \frac{15840/73440}{31680/73440} = \frac{1}{2}$.

3. Indichiamo gli eventi come segue:

$$\begin{aligned} F &= \text{la donna incinta è una fumatrice} \\ E &= \text{la gravidanza è extrauterina.} \end{aligned}$$

Dai dati del problema sappiamo che $P(E|F) = 2\cdot P(E|F^c)$ e che $P(F) = 0.32$, si richiede di calcolare $P(F|E)$.

Per la formula di Bayes possiamo ottenere

$$\begin{aligned} P(F|E) &= \frac{P(E|F)\cdot P(F)}{P(E|F)\cdot P(F)+P(E|F^c)\cdot P(F^c)} = \frac{2\cdot P(E|F^c)\cdot 0.32}{2\cdot P(E|F^c)\cdot 0.32 + P(E|F^c)\cdot(1-0.32)} \\ &= \frac{P(E|F^c)\cdot 0.64}{P(E|F^c)\cdot(0.64+0.68)} = \frac{0.64}{1.32} \simeq 0.48. \end{aligned}$$

4. Indichiamo gli eventi come segue:

$$\begin{aligned} S &= \text{il neonato sopravvive al parto} \\ C &= \text{il parto è cesareo.} \end{aligned}$$

Dai dati del problema sappiamo che $P(S) = 0.98$, $P(C) = 0.15$ e $P(S|C) = 0.96$; si richiede di calcolare $P(S|C^c)$.

Dalla legge delle probabilità composte si ricava che

$$P(S) = P(S|C)\cdot P(C) + P(S|C^c)\cdot P(C^c)$$

per cui abbiamo

$$0.98 = 0.96\cdot 0.15 + P(S|C^c)\cdot 0.85 \qquad \text{e quindi} \qquad P(S|C^c) = \frac{0.98 - 0.96\cdot 0.15}{0.85} \simeq 0.9835$$

5. Con notazione ovvia indichiamo con C, D, S l'evento che l'elettore è di centro, destra e sinistra. Indichiamo anche con V l'evento "l'elettore è andato a votare".

I dati del problema dicono che $P(C) = 0.46$, $P(S) = 0.30$, $P(D) = 0.24$, che $P(V|C) = 0.35$, $P(V|S) = 0.62$ e $P(V|D) = 0.58$.

La probabilità $P(V)$ richiesta nell'ultima frase, può essere trovata usando la legge delle probabilità composte

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|C)\cdot P(C) + P(V|S)\cdot P(S) + P(V|D)\cdot P(D) \\ &= 0.35\cdot 0.46 + 0.62\cdot 0.30 + 0.58\cdot 0.24 = 0.4862. \end{aligned}$$

Le probabilità condizionate $P(C|V)$, $P(S|V)$ e $P(D|V)$ possono essere ottenute tramite la formula di Bayes: per quanto riguarda la prima si ha

$$P(C|V) = \frac{P(V|C)\cdot P(C)}{P(V)} = \frac{0.35\cdot 0.46}{0.4862} \simeq 0.33.$$

In modo analogo si ottiene $P(S|V) \simeq 0.38$ e $P(D|V) \simeq 0.29$.

6. Dai dati abbiamo, con notazione ovvia,

$$P(I) = 0.4 \qquad P(II|I) = 0.3 \qquad P(III|I\cap II) = 0.1.$$

La probabilità che il giocatore superi tutte e tre le schermate (e quindi che vinca il gioco) è

$$P(I\cap II\cap III) = P(I)\cdot P(II|I)\cdot P(III|I\cap II) = 0.4\cdot 0.3\cdot 0.1 = 0.012$$

e quindi la probabilità che perda il gioco è

$$P(\text{perde}) = 1 - P(I\cap II\cap III) = 0.988.$$

Il giocatore fallisce alla prima schermata se si verifica l'evento I^c; fallisce alla seconda se si verifica $I \cap II^c$ e fallisce alla terza se si verifica $I \cap II \cap III^c$. Ognuno di questi tre eventi è contenuto nell'evento "perde". Quindi

$$\begin{aligned}
P(I^c|\text{perde}) &= \frac{P(I^c)}{P(\text{perde})} = \frac{0.6}{0.988} \simeq 0.61 \\
P(I \cap II^c|\text{perde}) &= \frac{P(I \cap II^c)}{P(\text{perde})} = \frac{P(I) \cdot P(II^c|I)}{P(\text{perde})} = \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.988} \simeq 0.28 \\
P(I \cap II \cap III^c|\text{perde}) &= \frac{P(I \cap II \cap III^c)}{P(\text{perde})} = \frac{P(I) \cdot P(II|I) \cdot P(III^c|I \cap II)}{P(\text{perde})} \\
&= \frac{0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.9}{0.988} \simeq 0.11
\end{aligned}$$

7. Indichiamo con A_1 l'evento "la pallina estratta dall'urna U_1 è arancione" e analogamente A_2 per la pallina estratta dall'urna U_2.

   La probabilità di A_2 varia a seconda di cosa è successo all'estrazione dalla prima urna, in particolare

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{3} \qquad P(A_2|A_1^c) = \frac{1}{3}.$$

   Data la composizione iniziale dell'urna U_1, si ha $P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (e, ovviamente, $P(A_1^c) = \frac{2}{3}$).

   Possiamo quindi trovare $P(A_2)$ usando la legge delle probabilità composte

$$P(A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|A_1^c) \cdot P(A_1^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

   Per la risposta al secondo quesito utilizziamo la formula di Bayes

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

8. Indichiamo con R_n l'evento "all'n-esimo lancio del dado esce faccia rossa" e, ovviamente, con T l'evento "la moneta ha dato testa".

   Ovviamente, per ogni n (e quindi ad ogni lancio) si ha $P(R_n|T) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(R_n|C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, per cui

$$P(R_n) = P(R_n|T) \cdot P(T) + P(R_n|C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   Se si verifica l'evento T allora

$$P(R_1 \cap R_2|T) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|T) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

   analogamente se si verifica C si ha

$$P(R_1 \cap R_2|C) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|C) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P(R_1 \cap R_2|T) \cdot P(T) + P(R_1 \cap R_2|C) \cdot P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18} \\ P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= \cdots = \frac{9}{54} = \frac{3}{18}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare

$$P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{3/18}{5/18} = \frac{3}{5}.$$

Per rispondere all'ultimo quesito usiamo la formula di Bayes:

$$P(T|R_1 \cap R_2) = \frac{P(T) \cdot P(R_1 \cap R_2|T)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{5/18} = \frac{4}{5}.$$