ATTENZIONE: CORRETTI I PROBLEMI DI VISUALIZZAZIONE DEL VECCHIO FILE E AGGIUNTI DEI PASSAGGI NELL'ESERCIZIO 4

Esercitazione 2 – soluzioni

---

1. Scriviamo due rappresentazioni equivalenti per Ω.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}\\ &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \text{ tali che } \omega_i \in \{C, T\} \text{ per } i = 1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

La prima è più semplice mentre la seconda può essere facilmente generalizzata al caso di n estrazioni (come vedremo nel prossimo esercizio). Comunque la si guardi, Ω contiene $2^3 = 8$ elementi (quindi $\#\Omega = 8$).

La rappresentazione degli eventi è

$$A = \{CCT\} \qquad B = \{TTC, TCT, CTT\} \qquad D = \{CCC, CTC\}.$$

Siccome la moneta è bilanciata, ogni risultato ha la stessa probabilità e quindi la probabilità di un generico evento E è

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

da cui deriva che $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

2. Qui conviene usare una rappresentazione simile alla seconda usata nell'esercizio precedente

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \text{ tali che } \omega_i \in \{C, T\} \text{ per } i = 1, \cdots, n\}$$

(ogni risultato possibile ω è una n-upla di simboli, ciascuno dei quali è una C o una T) Ω contiene 2^n elementi, (quindi $\#\Omega = 2^n$).

Per quanto riguarda gli eventi

$$\begin{aligned}A &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_2 = C, x_3 = T\}\\ D &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_3 = C\}\\ E &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_n = C\},\end{aligned}$$

si può vedere facilmente che $\#A = 2^{n-3}$, $\#D = 2^{n-2}$, $\#E = 2^{n-2}$: per quanto riguarda A, abbiamo 1 sola scelta per $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ma per ciascuno degli altri $n-3$ elementi abbiamo due scelte possibili, quindi complessivamente 2^{n-3}; in modo simile si ottengono le numerosità di D ed E.

Le probabilità quindi sono $P(A) = \frac{2^{n-3}}{2^n} = \frac{1}{8}$, $P(D) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$, $P(E) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$.

La probabilità di B si calcola come segue

$$P(B) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

3. CCT è uno dei risultati possibili (appare due volte croce, poi testa per la prima volta al terzo lancio e poi mi farmo); TT no (perché dopo la prima testa mi sarei dovuto fermare) e CCC neppure (perché non è ancora uscita testa e quindi devo andare avanti).

   L'insieme dei risultati è (attenzione al fatto – rilevante – che qui n può variare nei naturali)

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\omega = (x_1, \cdots, x_n) \text{ tali che } \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-1} = C, \omega_n = T,\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{\omega = (\underbrace{C, \cdots, C}_{n-1\text{volte}}, T),\ n \in \mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

   ATTENTI: Ω ha infiniti elementi e non c'è simmetria, nel senso che non hanno tutti la stessa probabilità.

   L'evento E_k contiene un solo elemento (quello in cui $n = k$)

$$E_k = \left\{(\underbrace{C, \cdots, C}_{k-1\text{volte}}, T)\right\}.$$

   L'evento E_k si verifica se la prima testa appare al k-esimo lancio. L'unione $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ si verifica se la prima testa appare in un lancio qualsiasi (vanno bene sia $k = 1$ che $k = 2$ che $k = 3$ e così via). Il complemento $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c$ si verifica se la prima testa non appare in alcun lancio, quindi se esce una successione infinita di C.

4. Indichiamo con C l'evento "lo studente estratto gioca a calcio"; analogamente V per la pallavolo e T per il tennis.

   I dati del problema forniscono le informazioni seguenti:

$$P(C) = 0.43 \quad P(V) = 0.34 \quad P(T) = 0.26$$
$$P(C \cap V) = 0.07 \quad P(C \cap T) = 0.09 \quad P(V \cap T) = 0.10 \quad P(C \cap V \cap T) = 0.03$$

   Cominciamo a vedere con che probabilità lo studente estratto pratica almeno uno dei tre sport:

$$P(C \cup V \cup T) = P(C) + P(V) + P(T) - P(C \cap V) - P(C \cap T) - P(V \cap T) + P(C \cap V \cap T) = 0.80.$$

   Lo studente estratto non pratica alcuno dei tre sport se si verifica l'evento $(C \cup T \cup V)^c$, quindi con probabilità

$$P((C \cup T \cup V)^c) = 1 - P(C \cup V \cup T) = 1 - 0.80 = 0.20.$$

   Lo studente gioca solo a calcio (senza fare alcuno degli altri sport) se si verifica $C \cap (V \cup T)^c = C \cap V^c \cap T^c$. Per calcolare la probabilità di questo evento devo ragionare nel seguente modo: posso scrivere l'evento C come

$$C = (C \cap V) \cup (C \cap T \cap V^c) \cup (C \cap T^c \cap V^c)$$

   (si suggerisce di ricorrere ad un grafico). Gli eventi che compaiono nell'unione sono a due a due incompatibili e quindi, per la legge delle probabilità totali, si ha

$$P(C) = P(C \cap V) + P(C \cap T \cap V^c) + P(C \cap T^c \cap V^c).$$

L'ultimo termine è proprio la probabilità cercata, quindi

$$P(C \cap T^c \cap V^c) = P(C) - P(C \cap V) - P(C \cap T \cap V^c),$$

ma $P(C \cap T \cap V^c) = P(C \cap T) - P(C \cap T \cap V)$, per cui si ottiene

$$\begin{aligned} P(C \cap T^c \cap V^c) &= P(C) - P(C \cap V) - P(C \cap T) + P(C \cap T \cap V) \\ &= 0.43 - 0.07 - 0.09 + 0.03 = 0.3. \end{aligned}$$

In modo simile gioca solo a pallavolo con probabilità $P(V \cap (C \cup T)^c) = 0.20$ e solo a tennis con probabilità $P(T \cap (C \cup V)^c) = 0.10$. In conclusione, pratica uno solo dei tre sport con probabilità

$$P(C \cap (V \cup T)^c) + P(V \cap (C \cup T)^c) + P(T \cap (C \cup V)^c) = 0.60.$$

Da come è posto l'ultimo quesito, non si capisce se si chiede la probabilità che almeno 1 dei due studenti estratti pratichi UN SOLO sport oppure ALMENO UNO sport. Supponiamo che chieda UN SOLO.

Se indichiamo con E_j l'evento "tra i due studenti estratti j praticano un solo sport" (che ha senso per $j = 0, 1, 2$) abbiamo che

$$\text{almeno uno dei due studenti estratti pratica un solo sport} = E_1 \cup E_2$$

con E_1 e E_2 incompatibili, quindi dobbiamo calcolare $P(E_1) + P(E_2)$.

Al punto precedente abbiamo scoperto che dei 100 studenti, 60 praticano un solo sport.

Se scegliamo a caso due studenti (senza ripetizione), abbiamo come casi possibili tutte i $\binom{100}{2}$ modi di selezionare i due studenti.

I casi favorevoli a E_1 sono i $\binom{60}{1}\binom{40}{1}$ modi di selezionare 1 studente di quel tipo e uno no; i casi favorevoli a E_2 invece sono $\binom{60}{2}$.

Quindi

$$P(E_1) = \frac{\binom{60}{1}\binom{40}{1}}{\binom{100}{2}} \quad P(E_2) = \frac{\binom{60}{2}}{\binom{100}{2}} \qquad \text{e} \qquad P(E_1 \cup E_2) = \frac{\binom{60}{1}\binom{40}{1} + \binom{60}{2}}{\binom{100}{2}}.$$

Se scegliamo i due studenti con ripetizione allora, utilizzando lo schema binomiale,

$$P(E_1) = \binom{2}{1}(0.60)^1(0.40)^1 \qquad P(E_2) = \binom{2}{2}(0.60)^2(0.40)^0$$
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.6^2.$$

Se invece di UN SOLO vogliamo la risposta al caso ALMENO UNO, basta sostituire 0.8 (trovato al primo punto) a 0.60.

5. Il problema è molto simile al precedente. Dai dati del problema ricaviamo che

$$P(D) = 0.50 \quad P(M) = 0.44 \quad P(T) = 0.38$$
$$P(D \cap M) = 0.05 \quad P(D \cap T) = 0.17 \quad P(M \cap T) = 0.10 \quad P(D \cap M \cap T) = 0.02$$

La probabilità che un individuo scelto a caso dalla popolazione possegga almeno una delle tre caratteristiche è

$$\begin{aligned} P(D \cup M \cup T) &= P(D) + P(M) + P(T) - P(D \cap M) - P(D \cap T) - P(M \cap T) + P(D \cap M \cap T) \\ &= 0.50 + 0.44 + 0.38 - 0.05 - 0.17 - 0.10 + 0.02 = 1.02 \end{aligned}$$

che è impossibile perché maggiore di 1.

6. Posso selezionare di una bottiglia da ciascuna cassetta in 27 modi (per ognuna delle 3 bottiglie ho 3 scelte), quindi $3^3 = 27$.

   Posso scegliere tutte bottiglie di vino rosso in un solo modo (1 possibilità per ogni bottiglia che scelgo), quindi $P(\text{tutti rossi}) = 1/27$ e lo stesso vale per $P(\text{tutti bianchi})$ e per $P(\text{tutti vini dolci})$.

   I tre eventi considerati prima sono incompatibili (se scelgo tutti rossi non posso scegliere tutti bianchi, e così via), quindi

$$\begin{aligned} P(\text{tutti uguali}) &= P(\text{tutti rossi} \cup \text{tutti bianchi} \cup \text{tutti vini dolci}) \\ &= P(\text{tutti rossi}) + P(\text{tutti bianchi}) + P(\text{tutti vini dolci}) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

   Per rispondere all'ultimo quessito, calcoliamo prima la probabilità di scegliere rosso italiano, bianco francese e dolce australiano. I casi favorevoli a questo evento sono $1 \cdot 1 \cdot 1$, per cui la probabilità è $1/27$.

   Con la stessa probabilità scegliamo rosso francese, bianco australiano e dolce italiano; lo stesso vale comunque rigiriamo la nazione di provenienza dei tre vini. Siccome i modi di rigirare le provenienze sono $3!$, la probabilità cercata è

$$P(\text{tutti vini diversi}) = 3! \cdot \frac{1}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$