Esercitazione n.1 (Calcolo combinatorio)

Esercizio n.1: Qual'è il numero di possibili scatole di 10 cioccolatini che si possono formare con cioccolatini di 5 tipi diversi?

Soluzione: Il numero è

$$C^R_{5,10} = \binom{14}{10} = 1001.$$

Infatti è come se pescassi da un urna contenente 5 cioccolatini di tipi diversi per 10 volte, con ripetizione (perchè può uscire più volte lo stesso cioccolatino). Sono combinazioni perchè l'ordine non conta, in quanto scatole con gli stessi cioccolatini ordinati in modo diverso sono considerate uguali.

Esercizio n.2: In quanti modi diversi si può vestire un uomo che possiede 10 vestiti, 5 paia di scarpe e 2 cappelli?

Soluzione: deve scegliere un oggetto da ciascuna delle tre categorie (in questo caso disposizioni e combinazioni coincidono, poichè $C_{n,1} = D_{n,1}$)

$$\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1} = 100.$$

Esercizio n.3: In quanti modi posso disporre su uno scaffale due enciclopedie, ciascuna di 3 volumi, e altre due opere, ciascuna di 4 volumi, in modo che volumi della stessa opera non siano mai separati?

Soluzione: si usano le permutazioni semplici

$$P_4 \cdot (P_3)^2 \cdot (P_4)^2 = 4!(3!)^2(4!)^2$$

dove P_4 è il numero di modi in cui si possono riordinare le 4 opere tra loro. Gli altri termini fanno riferimento invece al modo in cui si possono riordinare i libri all'interno delle varie opere.

Esercizio n.4: In quanti modi si possono distribuire 6 palline su 2 buche,

a) se le palline sono tutte uguali?

b) se le palline sono numerate?

Soluzione:

a) uso le combinazioni perchè l'ordine non conta (essendo le palline indistinguibili), quindi

$$C^R_{2,6} = \binom{2+6-1}{6} = \binom{7}{6} = 7,$$

d'altro canto si potevano elencare i casi possibili che sono (indicando con A e B le buche)

$$\begin{array}{c} AAAAAA \\ AAAAAB \\ AAAABB \\ AAABBB \\ AABBBB \\ ABBBBB \\ BBBBBB \end{array}$$

b) uso le disposizioni perchè l'ordine conta (essendo le palline numerate), quindi

$$D^R_{2,6} = 2^6.$$

Esercizio n.5: Quante sono le possibili sistemazioni di 5 ragazzi e 5 ragazze che si siedono ad un tavolo rotondo facendo in modo che non siano mai vicini due dello stesso sesso? E se invece che ad un tavolo si dovessero mettere in fila?

Soluzione: se il tavolo è rotondo devo fissare il posto in cui si siede il primo (poichè le sistemazioni che si ottengono per semplice rotazione non devono essere contate) e quindi ho

$$P_5 \cdot P_4 = 5!4!.$$

Se invece è una fila ho

$$5!5!2$$

dove il 2 si riferisce al numero di modi in cui può iniziare la fila (con un maschio o una femmina).

Esercizio n.6: Quante parole di 4 consonanti e 3 vocali si possono formare usando 7 consonanti e 5 vocali (senza nessun vincolo ortografico)?

Soluzione: si devono scegliere 4 consonanti da 7 (senza ripetizione e l'ordine in cui si pescano non conta) e lo stesso per le vocali. Poi si deve moltiplicare per il numero di parole che si possono formare con le 7 lettere scelte (P_7). Quindi

$$\binom{7}{4}\binom{5}{3}7!$$

Esercizio n.7: Quanti numeri di 4 cifre distinte si possono formare con $\{9, 8, 7, 6, 0\}$, escludendo quelli che iniziano con lo zero?

Soluzione: si considerano le disposizioni (senza ripetizione poichè le cifre devono essere distinte) $D_{5,4}$ e a queste bisogna sottrarre quelle relative ai numeri che iniziano con lo zero, che sono $D_{4,3}$. Quindi

$$\begin{aligned} D_{5,4} - D_{4,3} &= \frac{5!}{(5-4)!} - \frac{4!}{(4-3)!} \\ &= 5 \cdot 4! - 4! = 96 \end{aligned}$$

Esercizio n.8: Uno studente risponde a 7 domande scelte a caso da una lista di dieci. Quante possibli scelte ha

a) se non ha vincoli?

b) se deve rispondere ad almeno 3 delle prime 5 domande?

Soluzione:

a) se non ha vincoli

$$C_{10,7} = \binom{10}{7} = 120$$

b) se deve rispondere ad almeno 3 delle prime 5 è

$$\begin{aligned} & C_{5,3} \cdot C_{5,4} + C_{5,4} \cdot C_{5,3} + C_{5,5} \cdot C_{5,2} \\ = & \binom{5}{3}\binom{5}{4} + \binom{5}{4}\binom{5}{3} + \binom{5}{5}\binom{5}{2} = 110. \end{aligned}$$

Esercizio n.9: Una comitiva di 7 persone comprende 4 turisti e 3 guide alpine. Quante sono le cordate che si possono formare mettendo per prima e per ultima una guida?

Soluzione: Il numero di possibili cordate è

$$D_{3,2} \cdot P_5 = \frac{3!}{(3-2)!} 5! = 720.$$

Infatti ho $D_{3,2}$ che sono i modi in cui posso riempire il primo e l'ultimo posto con le guide (l'ordine conta) e P_5 che sono i modi in cui le restanti 5 persone possono sistemarsi in fila.

Esercizio n.10: Ogni pagina di un libro contiene N simboli di cui alcuni sono errori di stampa. Il libro ha n pagine e r errori. Qual'è la probabilità che la pagina 1 contenga esattamente r_1 errori, la pagina 2 contenga r_2 errori e così via fino alla pagina n (che deve contenere r_n errori)? Ovviamente deve essere $r_1 + r_2 + ... + r_n = r$.

Soluzione: La probabilità cercata è

$$\frac{\text{n. casi fav.}}{\text{n. casi poss.}} = \frac{\binom{N}{r_1}\binom{N}{r_2}\cdots\binom{N}{r_n}}{\binom{nN}{r}}$$

Al numeratore si ha il numero dei possibili ordinamenti degli r_j errori sulla j-esima pagina, per $j = 1, 2, ..., n$, al denominatore il numero di modi in cui posso scegliere r errori da nN simboli totali (senza vincoli).

Esercizio n.11: La mia auto è parcheggiata in una fila in linea retta di N posti inizialmente vuoti, ma non agli estremi della fila. Dopo un po' di tempo r degli N posti sono occupati. Qual'è la probabilità che i due posti vicini alla mia macchina siano rimasti vuoti?

Soluzione: La probabilità cercata è

$$\frac{\text{n. casi fav.}}{\text{n. casi poss.}} = \frac{\binom{N-3}{r-1}}{\binom{N-1}{r-1}} = \frac{(N-r)(N-r-1)}{(N-1)(N-2)}.$$

Il numero dei casi favorevoli coincide con il numero di modi in cui le altre $r-1$ macchine possono parcheggiare nei restanti $N-3$ posti (devo escludere 3 posti perchè uno è il mio e due sono in testa e in coda). Il numero dei casi possibili coincide con il numero di modi in cui le altre $r-1$ auto possono parcheggiare negli $N-1$ posti liberi.